高中数学竞赛专题讲座

丛书策划　李胜宏
丛书主编　陶平生　苏建一
　　　　　刘康宁　边红平

ZUHE WENTI

组合问题

本书主编　王建中

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座. 组合问题 / 陶平生等主编.
杭州:浙江大学出版社,2007.4
ISBN 978-7-308-05241-2

Ⅰ.高… Ⅱ.陶… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 039714 号

组合问题

本书主编 王建中

责任编辑 夏晓冬 杨晓鸣
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
排 版 浙江大学出版社电脑排版中心
印 刷 浙江省良渚印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 5.5
印 数 00001—10000
字 数 110 千
版 印 次 2007 年 4 月第 1 版 2007 年 4 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-05241-2
定 价 9.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88072522

编写说明

影响最大、级别最高的中学生“国际数学奥林匹克”(简称IMO)由来已久,自第1届IMO于1959年在罗马尼亚举行以来,有近60年的历史,其影响越来越广泛。在国际数学奥林匹克的推动下,世界各地的数学竞赛活动如火如荼。目前,我国数学竞赛逐步形成了从全国联合竞赛、全国中学生数学冬令营到国家集训队一个完整的竞赛选拔体系。

数学竞赛作为一项智力活动,吸引了无数数学爱好者积极参与,也为那些对数学有浓厚兴趣和有数学天赋的学生提供一个展示自我的平台,是发现和培养数学人才的一条有效渠道。我们欣喜地看到,通过这项活动,发现了一批数学苗子,培养了一批数学人才。许多参与竞赛的优秀选手后来都成了杰出的数学家。

总体看来,我国的数学竞赛体制日趋完善,它的一些功能和作用也日益凸显。随着高校招生制度的改革,各种学科竞赛,尤其是数学竞赛的选拔功能越来越被广大高校所认可。事实上,学科竞赛已经成为高校自主招生和选拔人才的重要途径之一。

我们本着为数学竞赛的普及、提高做点有益事情的愿望,在全国范围内组织一批长期从事数学竞赛且做出杰出成绩的一线专家编写了一套“高中数学竞赛专题讲座丛书”。丛书包括《初等数论》、《函数与函数方程》、《复数与多项式》、《不等式》、《组合问题》、《排列组合与概率》、《数列与归纳法》、《集合与简易逻辑》、《三角函数》、《立体几何》、《平面几何》、《解析几何》和《数学结构思想及解题方法》13种。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本数学思想、方法,凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是:

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题，通过对典型例题的解剖，传授数学思想方法，侧重培养学生的逻辑思维能力，不唯解题而解题；

2. 本着少而精的原则选择材料，不搞题海战术，不追求大而全，而是以点带面，举一反三；

3. 以数学修养和能力培养为立意，通过深刻剖析问题的数学背景，挖掘数学内涵，培养学生的数学品格和解决实际问题的能力；

4. 在注重基础知识训练同时，有适当程度的拔高，对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有一定的指导作用和参考价值。

从书由浙江大学数学系教授、博士生导师、全国数学奥林匹克竞赛领队李胜宏策划；丛书由陶平生、苏建一、刘康宁、边红平主编；参加编写的成员是：陶平生、苏建一、刘康宁、边红平、黄军华、王建中、岑爱国、韦吉珠、张雷、王俊明、李世杰、沈虎跃、斯理炯、虞金龙、马洪炎。

鉴于我们的水平有限，书中的不妥之处敬请读者批评指正。

目　录

第1讲 组合计数

知识点金

组合计数就是要计算给定集合的元素个数，它是组合数学的重要组成部分. 由于在具体问题中给出的集合有不同的约束条件，因此，解决有关计数问题时需要相当的技巧. 这也使它成为各类数学竞赛的命题热点.

计数中最基本的两个原理是分类计数原理与分步计数原理.

计数中的重要模型：

(1)相异元素的线排列：从 n 个不同元素中取出 m 个元素排成一排的排列数为 A_n^m.

(2)相异元素的组合：从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数为 C_n^m.

(3)可重复排列：从 n 个不同元素中取出 m 个元素(可以重复取)的排列数为 n^m.

(4)可重复组合：从 n 个不同元素中取出 m 个元素(可以重复取)的组合数为 C_{n+m-1}^m.

(5)不尽相异元素的全排列：设 n 个元素可以分成 k 组，每组内元素相同，不同组元素不同，第 i 组的元素有 $n_i(i=1,2,\cdots,k)$ 个，且 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$，则这 n 个元素的全排列数为 $\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\ \cdots n_k!}$.

(6)相异元素的圆排列：从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素排成一个圈的排列数为 $\frac{A_n^m}{m}=\frac{n!}{(n-m)!\cdot m}$.

(7)错位排列：n 个相异元素排成一排 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，且 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不排在第 i 位的排列数为 $n!\ \cdot\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$.

证明：设 $1,2,\cdots,n$ 的全排列 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 的集合为 I，而使 $t_i=i$ 的全排列的集合记为 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$，

则 $D_n=|I|-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$.

所以 $D_n=n!-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$.

注意到 $|A_i|=(n-1)!$, $|A_i\cap A_j|=(n-2)!$, $\cdots$, $|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|=0!=1$.

由容斥原理有:

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|&=n\cdot(n-1)!-C_n^2\cdot(n-2)!+C_n^3(n-3)!-\cdots+(-1)^{n-1}C_n^n\cdot 0!\\&=n!\cdot\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right),\end{aligned}$$

所以 $D_n=n!\cdot\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$.

例题精析

例 1 求由1,2,3,4,5,6六个数字构成的至少有三位数不同,且1,6不相邻的五位数的个数.

分析 根据题目条件进行分类.

解 先考察恰有两位数不同的五位数的个数为 $C_6^2\times(2^5-2)=450$ 个,而各位数均相同的五位数有 $C_6^1=6$ 个.

再考察至少有三位数不同且有1,6相邻的五位数的个数,分六种情况:

(1)五位数中有2个1,2个6,另一个数设为 a,则仅有 $11a66$, $66a11$ 两种使1,6不相邻,又 a 有4种取法,故有 $4\times(C_5^1C_4^2-2)=112$ 种.

(2)五位数中有2个1,1个6. 若6在第一位或最后一位,则1可取3个位置(6 * □□□,□□□ * 6),有 $C_3^2\times2$ 种使1,6不相邻;若6在2,3,4位,则1可取2个位置,有 $C_2^2\times3$ 种使1,6不相邻. 故有 $4^2\times(C_5^1\cdot C_4^2-C_3^2\times2-C_2^2\times3)$ 种使1,6相邻,即有336种.

(3)2个6,1个1,同(2)有336种使1,6相邻的取法.

(4)1个6,1个1,有 $4^3\times C_4^1\times P_2^2=512$ 种.

(5)3个6,1个1,有666 * 1,1 * 666两种使1,6不相邻. 故有 $4\times(C_5^1\cdot C_4^1-2)=72$ 种使1,6相邻的取法.

(6)3个1,1个6,同(5)有72种.

由上六种情况可知,至少有三位数不同,且有1,6相邻的五位数的个数一共有

$112+336+336+512+72+72=1440$ 种.

由容斥原理,所求的五位数的个数为

$6^5-(1440+450+6)=5880$ 个.

例 2 从1,2,…,14中取出三个数 a_1,a_2,a_3,使满足 $a_1\leqslant a_2-3$, $a_2\leqslant a_3-3$. 有多少

种不同取法？（1989 年全国联赛试题）

分析 设取出的三个数为 a_1, a_2, a_3，在 a_1 之前有 x 个数，a_1 与 a_2 之间有 y 个数，a_2 与 a_3 之间有 z 个数，a_3 之后有 w 个数，满足 $x+y+z+w=11$.

解 该问题等价于从排成一排的 14 个不同小球中取出 3 个，并要求每两个之间至少相隔两个. 为解决这一问题，可改变顺序：先取出 4 个小球，从 10 个小球中任取 3 个，然后再在取出的 3 个中按顺序，每两个间插入 2 个小球，因此原问题等价于从 $1,2,\cdots,10$ 中任意取出三个数的不同取法. 共有 $C_{10}^3=120$ 种.

（注 一般地，从 $1,2,\cdots,m$ 中取出 a_1, a_2, a_3，使 $a_2-a_1\geqslant s, a_3-a_2\geqslant t$，则不同取法种数有 $C_{m-2-s-t}^3$ 种.）

例 3 从 $1,2,\cdots,49$ 中取出 6 个不同的数，使得其中至少有两个相邻，问共有多少种取法？

分析 可以按照条件“6 个数至少两个相邻”的不同情况进行分类，较复杂. 这里先求出没有两个数相邻的取法总数.

解 首先，集合 $M=\{1,2,\cdots,49\}$ 的所有不同的 6 元子集的个数为 C_{49}^6. 但是，其中 6 个数不相邻的子集

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_6\}, a_i+1<a_{i+1}, i=1,2,3,4,5, \quad ①$$

不满足题中要求.

记满足①的所有 6 元子集的集合为 A，并令

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_6\}\to\{b_1,b_2,\cdots,b_6\}, \quad ②$$

其中 $b_i=a_i-i+1, i=1,2,3,4,5,6$.

显然，$b_1,b_2,\cdots,b_6$ 互不相同且有 $1\leqslant b_1<b_2<\cdots<b_6\leqslant 44$. 容易验证②定义的映射是由集合 A 到集合 $\{1,2,\cdots,44\}$ 的所有不同的 6 元子集的一一映射.

所以 $|A|=|B|=C_{44}^6$.

故满足条件的取法共有 $C_{49}^6-C_{44}^6$ 种.

例 4 把 n 个学生分成若干个小组（每组个数不限）的每一种分法称为“n 分组”，不同的 n 分组种数记作 a_n，至少有一组只有一个学生的不同的 n 分组种数记作 b_n. 求证：$a_n=b_n+b_{n-1}$.

分析 运用配对原理构造两个集合的一一对应关系.

证明 假设 P_n 为至少有一组恰有一名学生的某一个 n 分组，Q_n 为每一组至少有两名学生的某一个 n 分组，又设不同的 Q_n 有 c_n 种. 显然有 $a_n=b_n+c_n$. 下证 $b_{n-1}=c_n$.

由 b_{n-1} 与 c_n 的定义可知，只要证明对给定的 n，能够建立由不同的 P_{n-1} 组成的集合与由不同的 Q_n 组成的集合元素之间的一一对应关系就可以了.

事实上，假设 P_{n-1} 是编号为 $1,2,\cdots,n-1$ 的学生的任意一个 $n-1$ 分组，将 P_{n-1} 中只

有一名学生的所有的小组与编号为 n 的学生合并成新的一组. 由于 P_{n-1} 中至少有一组只有一名学生,因此得到的新的 n 分组每组至少有两名学生,即得到一个 Q_n.

反之,任取一个 Q_n,将编号为 n 的学生所在的小组拆成只有一名学生的若干小组,同时去掉 n 号学生,就可得到一个 P_{n-1}.

我们已经建立了集合$\{P_n\}$与集合$\{Q_n\}$之间的一一对应关系,故 $b_{n-1}=c_n$,从而证得 $a_n=b_n+b_{n-1}$.

例 5 求 k 个红球 m 个白球($k\geqslant m$)的满足下列条件:在每个位置前的红球数不少于白球数的排列数.

分析 运用配对原理,构造两个集合的一一对应关系.

解 如果不考虑附加条件,排列数为 C_{m+k}^{m}. 以下证明不满足附加条件的排列数为 C_{m+k}^{m-1}.

任取一个不满足条件的且有 k 个红球,m 个白球的排列,必定存在一个位置 $2S+1$,这里 $S\geqslant 0$,使得排列在这一位上正好是白球,且在这一位前有 S 个红球和 S 个白球. 我们取满足这个条件的 S 中的最小的一个,且在这个排列的最前面加一红球,这样就得到一个 m 个白球,$k+1$ 个红球的排列. 这个排列的第一个球是红球,且在前面 $2S+2$ 个球中红白球数相同. 现在,再在前 $2S+2$ 个位置上将红球换成白球,白球换成红球,得到一个 m 个白球,$k+1$ 个红球的,且第一个是白球的排列,这个排列同每个不满足条件的排列相对应,现证明这是个一一映射:

$\{k$ 个红,m 个白的不满足条件的排列$\}\rightarrow\{$白球在首,m 个白,$k+1$ 个红的排列$\}$,由以上构造可得,这是一个单射.

反之,对于每一个以白球开始,m 个白,$k+1$ 个红的排列,由于 $m<k+1$,因此从首位开始,总有一个位置红白球数相等(因为首位是白球,开始白球数多,但总的红球数多于白球数). 在从首位到第一个这样的位置,将红白球交换,再去掉第一个红球,就得到 k 个红球,m 个白球的不满足条件的排列了,映射为一一映射. 因此,不满足条件的排列数为 C_{m+k}^{m-1}. 故满足条件的排列数为 $C_{m+k}^{m}-C_{m+k}^{m-1}$.

(注 一一对应的技巧在组合计数中被广泛应用,这就是所谓配对原理. 如果存在集合 A 到集合 B 之间的一个一一映射,则集合 A 与集合 B 有相同的元素个数,即 $|A|=|B|$.)

例 6 在平面上给出 5 个点,连接这些点的直线互不平行,互不垂直,也不重合. 过一点向其余四点的连线作垂线,求这些垂线的交点最多能有多少个?(其中不计已知的 5 点.)

分析 根据题意进行计算. 关键是要做到不重复,也不遗漏.

解 设 P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 为所给的点,则两两连线有 $C_5^2=10$ 条;每三点构成一个三角形,共有 $C_5^3=10$ 个;其中四个点能连成连线 $C_4^2=6$ 条. 自另一点可作 6 条垂线,共可作

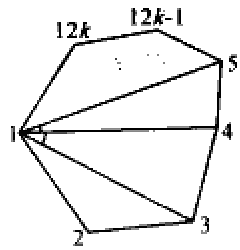
$6\times5=30$ 条，这些垂线至多有 $C_{30}^2=435$ 个交点. 因为在其中 10 条连线上，每一连线有三条垂线互相平行，没有交点，故应减去 $10\cdot C_3^2=30$ 个. 又 10 个三角形每三条高交于一点，故应减去 $10(C_3^2-1)=20$ 个. 而每一点都有 6 条垂线通过，同时这 5 点又不计，所以应减去$5\cdot C_6^2=75$ 个. 因此，我们得到垂线的交点最多为 $435-30-20-75=310$ 个.

例 7 出席某会议共$12k$ 个人($k\in \mathbf{Z}_+$)，其中每个人均恰好同其余 $3k+6$ 个人相识；对任何两个人，均有 n 个人同他们相识，问共有多少人出席会议?

分析 以点代人，以线段代替相识，并运用算两次思想.

解 将人视为点，相识就连线，每点共组成 C_{3k+6}^2个角，每个角恰对应一个顶点，因此图中共有角 $12k\cdot C_{3k+6}^2$个.

另一方面，对任何两个人，与该两人都相识的人有 n 个，因此对该两人对当 n 个角，每个角对应唯一一个两人对，对每个两人对当且仅当有 n 个角，从这一角度说总角数为 $n\cdot C_{12k}^2$. 综合可得



$$nC_{12k}^2=12k\cdot C_{3k+6}^2,$$

即 $9k^2+33k-12nk+n+30=0$. 易见 $3\mid n$.

设 $n=3m$，进一步化简得

$$3k^2+11k-12km+m+10=0,$$

即 $4m=(k+3)+\dfrac{9k+43}{12k-1}$.

当 $k\geqslant15$ 时，$12k-1\leqslant9k+43$，$4m$ 不可能为整数，对于 $1\leqslant k\leqslant14$，只有当 $k=3$ 时，$\dfrac{9k+43}{12k-1}$取整数 2，从而 $m=2$，$n=6$，因此只可能是 36 人.

下面构造一个实例来说明命题的情况是存在的. 如下表，R,O,Y,G,B,V 表示 6 种颜色，将人染色，每人恰好认识与他坐在同一行或同一列或与他具有相同颜色的人，这样就保证了每人恰认识 15 个人. 只需再证这种构造满足第二个条件即可.

R	O	Y	G	B	V
V	R	O	Y	G	B
B	V	R	O	Y	G
G	B	V	R	O	Y
Y	G	B	V	R	O
O	Y	G	B	V	R

设 P,Q 是任两个与会者，若他们坐在同一行，则与这两人都认识的人包括这一行的其余 4 个人以及位于 P 所在列与 Q 同色的人，和位于 Q 所在列与 P 同色的人. 当 P 和

Q 同色或位于同一列时，也均可类似地分析．假设 P 和 Q 不同行，不同列，且具有不同的颜色，则二人共同认识的 6 个人分别是：位于 P 所在行和 Q 所在列的 1 个人（与 P,Q 均不同色），位于 P 所在列和 Q 所在行的 1 个人，位于 P 所在行和列且与 Q 同色的 2 个人，位于 Q 所在行和列且与 P 同色的 2 个人．

例 8 考察由{1,2,3,4,5,6}组成的一个排列：$a_1a_2a_3a_4a_5a_6$，经过不超过 4 次调换其中的两个数字而得到 123456．试求满足条件的排列的个数．

解 对任一个排列 $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$，取 a_1，若 a_1 不在 a_1 号上，取在 a_1 号上的数 a'_1，若 a'_1 不在 a'_1 号上，取 a'_1 号上的数 a''_1，直到取到 $a_1^{\cdots}$ 号上的数 a_1，则 $(a_1, a'_1, a''_1, \cdots, a_1^{\cdots})$ 称为一个链．记链的长度为链中元素的个数，显然，链的长度为 1,2,3,4,5,6．长度为 $i(i=1,2,3,4,5,6)$ 的链需换 $i-1$ 次可达到目的，直到将所有的链都分为长为 1 的链为止．

因题目要求不超过 4 次调换，则一个满足条件的排列中最长链的长度可为 5,4,3,2,1，且只要是最长链长为 5,4,3,2,1 的排列均满足条件．

现考察最长链长为 6 的排列数，故所求数目为

$$6!-5!=720-120=600 \text{ 个}.$$

例 9 $n,k\in \mathbf{Z}_+$，S 为平面上 n 个点的集合，对于 S 中任一点 A，S 中至少有 k 个点到 A 的距离相等．证明：$k<\frac{1}{2}+\sqrt{2n}$.

分析 利用"算两次"思想构造不等式，从而实现证明．

证明 以集合 S 内的点为圆心作 n 个圆，根据已知条件，我们可以使每一个所作的圆上至少有 k 个点属于 S．

称两个端点都在 S 中的线段为"好线段"，考虑好线段的条数．

一方面，好线段的条数显然为 C_n^2．

另一方面，在每个所作的圆上至少有 C_k^2 条弦是好线段，n 个圆有 $n\cdot C_k^2$ 条好线段，其中有一些是公共弦被重复计算了．由于每两个圆至多有一条公共弦，所以公共弦的条数 $\leqslant C_n^2$，从而好线段的条数不小于 $nC_k^2-C_n^2$．

综合起来得到 $C_n^2\geqslant nC_k^2-C_n^2$，

从而 $k<\frac{1}{2}+\sqrt{2n}$.

例 10 若有 k 条已知直线通过平面上的一点，则称为 k 重点，在平面上引 n 条直线，这些直线相交所得的二重，三重，…，n 重点的数目分别为 $k_2, k_3, \cdots, k_n$．求这些直线将平面分成的块数．

分析 无两线平行且无三线共点的情形是很容易的问题．对于一个 n 重点时，可以通过平移直线转化为无三线共点，关键是抓住它们之间的联系．

解 分为以下四步：

(1)平面上引 n 条直线，无两线平行及三线共点，则此 n 条直线将平面分成 $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ 块.

设这些直线将平面分成 $V(n)$ 块，考察其中的一条直线，它被其他的 $(n-1)$ 条直线截成 n 段. 去掉这条直线后，每段两侧的两块合成一块，故块数将减少 n 块，而剩下 $V(n-1)$ 块. 故有递推式 $V(n)=V(n-1)+n$，显然 $V(1)=2$. 故得 $V(n)=V(n-1)+n=V(n-2)+[n(n-1)]=\cdots=V(1)+[2+3+\cdots+n]=1+(1+2+3+\cdots+n)=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$.

(2)平面上引 n 条直线，这些直线相交所得的二重，三重，…，n 重点的数目分别为 k_2，k_3，…，k_n. 则 n 条直线中的平行线对的数目为 $C_n^2-\sum\limits_{r=2}^{n}k_rC_r^2$.

首先，考察一个 r 重点，将通过这点的直线适当平移，使无三线共点，则共得到 C_r^2 个交点，对每个点都这样做，共得 $\sum\limits_{r=2}^{n}k_rC_r^2$ 个交点. 再加上这些直线中的平行线对的数目 l，即得 C_n^2.

所以 $C_n^2=\sum\limits_{r=2}^{n}k_rC_r^2+l$，即 $l=C_n^2-\sum\limits_{r=2}^{n}k_rC_r^2$.

(3)平面上引 n 条直线，无三线共点，但有 l 对平行线，则这些直线将平面分成 $\frac{1}{2}(n^2+n+2)-l$ 块. 先考察一条直线，其余的 $(n-1)$ 条直线将此直线分成 $n-l_i$ 段，其中 l_i 为与此直线平行的已知直线的数目. 去掉这条直线后，平面被分成的块数将减少 $(n-l_i)$ 块. 逐一地去掉这些直线，最后剩下一块(即全平面). 故得

$$(n-l_n)+[(n-1)-l_{n-1}]+\cdots+1+1$$
$$=(1+2+3+\cdots+n)-\sum_{i=1}^{n}l_i+1=\frac{1}{2}(n^2+n+2)-l.$$

(4)现在回到原题. 设这 n 条直线将平面分成 $p(n)$ 块，考察一个 r 重点，将过这点的 r 条直线适当平移使其中无三线共点，这时块数将增加. 新增加的块数为 $\frac{1}{2}(r^2+r+2)-2r$，由于对每点都这样，共增加的块数为 $\sum\limits_{r=2}^{n}\left[\frac{1}{2}(r^2+r+2)-2r\right]k_r$，再加上原来的 $p(n)$ 块，故总共有 $p(n)+\sum\limits_{r=2}^{n}\left[\frac{1}{2}(r^2+r+2)-2r\right]k_r$ 块. 另一方面，由(2)所引的 n 条直线中平行线对的数目为 $\left(C_n^2-\sum\limits_{r=2}^{n}k_rC_r^2\right)$ 条；而由(3)，在调整每条直线使无三线共点时，这些

直线将平面分成$\frac{1}{2}(n^2+n+2)-l=\frac{1}{2}(n^2+n+2)+\sum_{r=2}^{n}k_rC_r^2-C_n^2$块.

故得 $P(n)+\sum_{r=2}^{n}\left[\frac{1}{2}(r^2+r+2)-2r\right]k_r$

$$=\frac{1}{2}(n^2+n+2)+\sum_{r=2}^{n}k_rC_r^2-C_n^2.$$

由此解得 $p(n)=n+1+\sum_{r=2}^{n}(r-1)k_r$.

同步检测 1

1. 若在正方形 $ABCD$ 所在的平面上有一点 P，使$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCD$、$\triangle PDA$都是等腰三角形，那么具有这样性质的点 P 共有 ( )

A. 1 个　　B. 5 个　　C. 9 个　　D. 17 个

2. 若六边形的周长为 20，各边长都是整数，且以它的任意三条边为边都不能构成三角形，那么这样的六边形 ( )

A. 不存在　　B. 只有一个

C. 有有限个，但不止一个　　D. 有无穷多个

3. 在某次乒乓球单打比赛中，原来计划每两名选手比赛一场，但有 3 名选手各比赛了 2 场之后就退出了. 这样，全部比赛只进行了 50 场. 那么，在上述 3 名选手之间进行比赛的场数是 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 从 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 这 10 个数中取出 3 个数，使其和为不小于 10 的偶数，不同的取法有____________ (1998 年全国高中数学联赛题)

5. 已知直线 $ax+by+c=0$ 中的 a、b、c 是取自集合{−3，−2，−1，0，1，2，3}中的 3 个不同的元素，并且该直线的倾斜角为锐角. 那么，这样的直线的条数是________.

(1999 年全国高中数学联赛题)

6. 集合{1，2，3，…，51}的 5 元子集，元素和能被 3 整除的有________个.

7. 用 1 和 2 组成和为 10 的数列有________个.

8. 方程 $2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}=3$ 的非负整数解共有________组.

9. 8 个女孩和 25 个男孩围成一圈，任意两个女孩之间至少站两个男孩子，那么，共有________种不同的排列方法(视只要把圈旋转一下就重合的排法为一种).

10. 将6个红珠、8个黄珠、1个白珠串成一串项链，则项链可能出现的种类共有____________种（注：同色珠子不加以区分）.

11. 在平面内任取 n 个相异点，证明：其中距离为单位长的点对的数目 $<\frac{n}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}n^{\frac{3}{2}}$.

12. 集合 $S=\{1,2,3,\cdots,2000\}$，S的41元子集如果能被5整除，则称为好子集. 求 S 的好子集个数.

13. 一位魔术师有一百张卡片，分别写有数字1到100. 他把这一百张卡片放入三个盒子里，一个盒子是红色的，一个是白色的，一个是蓝色的，每个盒子里至少放入了一张卡片. 一位观众从三个盒子中挑出两个，再从这两个盒子里各选取一张卡片，然后宣布这两张卡片上的数字之和. 知道这个和之后，魔术师能指出哪一个是没有从中选取卡片的盒子. 问共有多少种放卡片的办法，使得这个魔术能够成功（如果至少有一张卡片被放入不同颜色的盒子，则被认为是不同的两种方法.）？ （2000年第41届IMO试题）

第2讲 抽屉原理

知识点金

抽屉原理是一个非常简单又应用广泛的原理.

抽屉原理(有限形式):m 个球放到 n 只抽屉中,一定有一只抽屉放进的球数不少于 $\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$ 个,其中$[a]$表示不大于 a 的最大整数.

抽屉原理(无限形式):无穷多个球放到有限多只抽屉中,一定有一只抽屉放进了无穷多个球.

抽屉原理的推广形式:设平面上给定 r 个面积分别为 $S_1,S_2,\cdots,S_r$ 的图形,$S_1+S_2+\cdots+S_r=m$. 将这 r 个图形以任意的方式移置到某一个已知面积为 n 的平面图形 F 内,则至少有 $\left(\frac{m}{n}\right)$ 个图形在 F 中有公共点. 这里 $\left(\frac{m}{n}\right)$ 表示不小于 $\frac{m}{n}$ 的最小整数.

应用抽屉原理解题,关键是首先根据问题的已知条件找出元素分类的方式,从而巧妙地制造一只只抽屉.

例题精析

例1 从整数1,2,…,100 中任选 51 个整数,证明在选取的这些整数中必存在两个整数,其中之一可被另一个整数整除.

分析与解 任何整数都可表示为 $2^n\cdot a$,其中 $n\geqslant 0$,且 a 为奇数.

因为 $a\in\{1,3,5,\cdots,99\}$,所以在选取的 51 个整数中,有两个整数含有相同的奇数因

子 α，从而一个必被另一个整除.

例 2 某次会议有 n 个人参加，试证：其中存在两人，使得其余的 $n-2$ 个人中至少有 $\left[\frac{n}{2}\right]-1$ 个人，每个人或者同这两个人相识，或者都不相识.

分析 给定两人，其余任何一个人与这两人的关系只有三种：与两人都认识；与两人都不认识；恰与两人中一人认识. 从问题的反面"两人恰有一人认识第三者"考虑，灵活运用抽屉原理.

证明 给定两人，若第三人同且仅同其中之一相识，则称第三人对此两人组是关联的. 设某 A 恰同 k 个人相识，则与 $n-k-1$ 个人不相识，于是 A 对 $k(n-k-1)$ 个两人组是关联的. 由平均不等式得

$$k(n-k-1)\leqslant\frac{1}{4}(n-1)^2.$$

于是，每个人至多对于 $\frac{1}{4}(n-1)^2$ 个组是关联的，所以 n 个人至多有 $\frac{1}{4}n(n-1)^2$ 个组是关联的两人组.

这些组分成 C_n^2 类，由抽屉原理，至多有 $\left[\frac{n(n-1)^2}{4C_n^2}\right]=\left[\frac{n-1}{2}\right]$ 个关联的两人组. 即存在一个两人组，使得这两人组至多和 $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ 个人组成关联的两人组.

因此这两人至多和 $n-2-\left[\frac{n-1}{2}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]-1$ 个人不组成关联的两人组，即和这 $\left[\frac{n}{2}\right]-1$ 个人或者相识，或者都不相识.

例 3 半径为 19 的圆 C 内有 650 个点，证明：存在内半径为 2，外半径为 3 的圆环，它至少盖住其中的 10 个点.

分析 利用抽屉原理的面积重叠原则.

证明 作半径为 19 的圆 C，其面积为 $19^2\pi$. 在 C 内以定点 $A_i(i=1,2,\cdots,650)$ 为圆心，内半径为 2，外半径为 3 作圆环，其面积为 $(3^2-2^2)\pi=5\pi$. 由抽屉原理，至少有 $\left[\frac{650\times5\pi}{19^2\pi}\right]+1=10$ 个圆环盖住了同一个点 O. 不妨设这 10 个圆环的中心为 $A_1,A_2,\cdots,A_{10}$. 由于 $2\leqslant OA_i\leqslant3(i=1,2,\cdots,10)$，故以 O 为圆心，内半径为 2，外半径为 3 的圆环盖住了 $A_1,A_2,\cdots,A_{10}$ 共 10 个点.

（注 面积重叠原则：在平面上有 n 个面积分别是 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的图形，把这 n 个图形按任何方式一一搬到某一面积为 A 的固定图形上去，(1)如果 $A_1+A_2+\cdots+A_n>A$，则至少有两个图形有公共点；(2)如果 $A_1+A_2+\cdots+A_n<A$，则固定图形中至少有一个点未被盖住.）

例 4 在一个面积为 5 的房内放有九块面积为 1 的地毯（地毯形状任意）. 证明：总有

两块地毯重叠的部分面积至少有$\frac{1}{9}$.

分析与证明 假定任何两块地毯重叠部分面积都小于$\frac{1}{9}$,我们依次一块一块地计算每块地毯盖住了多少前面地毯尚未盖住部分的面积.第一块盖住的面积为1,即$\frac{9}{9}$.第二、三…块依次盖住前面未盖住的面积要大于$\frac{8}{9},\frac{7}{9},\cdots,\frac{1}{9}$,因为$\frac{9}{9}+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+\cdots+\frac{1}{9}=5$.所以九块地毯盖住的面积要比5大,矛盾!从而问题得证.

例5 一个凸n边形,位于边长为1的正方形内,则存在凸n边形的三个顶点,以此三点为顶点的三角形面积$\leqslant\frac{8}{n^2}$.

分析与解 将各边$a_1,a_2,\cdots,a_n$在正方形相邻两边上作投影,设a_i投影长为x_i,y_i.

因为是凸的n边形,所以正方形投影边上每个点至多被凸n边形二边投影所覆盖,

所以$\sum a_i\leqslant\sum x_i+\sum y_i\leqslant 4$,

即$(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)+(a_n+a_1)=2\sum a_i\leqslant 8$,

所以存在一个i,使$(a_i+a_{i+1})\leqslant\frac{8}{n}$(记$a_{n+1}=a_1$),

故,以a_i,a_{i+1}为边的三角形面积$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n}\right)\cdot\left(\frac{4}{n}\right)=\frac{8}{n^2}$.

例6 设a与2,5都互质.证明:对任何n,有一个a的方幂以$\underbrace{000\cdots01}_{n个数码}$结尾.

分析 注意到a与2,5都互质,则a的方幂不能被10^n整除.考虑$a,a^2,a^3,\cdots,a^{10^n}$模$10^n$的余数.

解 考虑10^n个项$a,a^2,a^3,\cdots,a^{10^n}$,取它们$(\bmod 10^n)$的余数.因为$a$与2,5都互质,余数不会出现0,因此最多仅可能有$(10^n-1)$个余数:$1,2,\cdots,10^n-1$,从而其中有两个数$a_i,a_j(i<j)$余数相同,它们的差被$10^n$整除:$10^n\mid(a^j-a^i)$,即$10^n\mid a^i(a^{j-i}-1)$.

因为$(10^n,a^i)=1$,所以$10^n\mid(a^{j-i}-1)$,即$a^{j-i}-1=q\cdot 10^n$,$a^{j-i}=q\cdot 10^n+1$.

原题得证.

例7 设$a,b\in\mathbf{N}$互质,则对于某对$x,y\in\mathbf{N}$,有$ax-by=1$.

分析 即证$ax\equiv 1(\bmod b)$有解.

解 考虑数列$a,2a,3a,\cdots,(b-1)a$中数被b除的余数,余数不为0.如果余数也不为1,则存在正整数$p,q(0<p<q<b)$,使$pa\equiv qa(\bmod b)$.但a与b互质,所以$b\mid(q-p)$.由于$0<q-p<b$,这就存在矛盾.因此存在x使$ax\equiv 1(\bmod b)$,即$ax=1+by$,$ax-by=1$.

例8 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为实数，满足$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2=1$，求证：对于每一整数$k\geqslant2$，存在不全为零的整数$a_1,a_2,\cdots,a_n$，使得$|a_i|\leqslant k-1(i=1,2,\cdots,n)$，并且

$$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.$$ （第28届IMO试题）

分析 由条件及柯西不等式易得$a_1|x_1|+a_2|x_2|+\cdots+a_n|x_n|\leqslant(k-1)\sqrt{n}$. 把区间$[0,(k-1)\sqrt{n})$等分成$k^n-1$个小区间，构造抽屉.

证明 由柯西不等式得

$(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)^2\leqslant(1^2+1^2+\cdots+1^2)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$，

所以$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\leqslant\sqrt{n}$.

因此，当$0\leqslant a_i\leqslant k-1$时，有

$a_1|x_1|+a_2|x_2|+\cdots+a_n|x_n|\leqslant(k-1)(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)\leqslant(k-1)\sqrt{n}$.

把区间$[0,(k-1)\sqrt{n})$等分成k^n-1个小区间，每个区间的长度为$\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$. 由于每个$a_i$能取$k$个整数，因此$a_1|x_1|+a_2|x_2|+\cdots+a_n|x_n|$共有$k^n$个正数. 由抽屉原理知，必存在两个数落在同一个小区间内. 设它们分别是$\sum\limits_{i=1}^{n}a'_i|x_i|$和$\sum\limits_{i=1}^{n}a''_i|x_i|$，

则有$\left|\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i'-a_i'')|x_i|\right|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$. （*）

又$|a'_i-a''_i|\leqslant k-1,i=1,2,\cdots,n$，

取$a_i=\begin{cases}a'_i-a''_i & x_i\geqslant0\\a''_i-a'_i & x_i<0\end{cases},i=1,2,\cdots,n$，

于是（*）式可表示为$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$.

其中a_i为整数，满足$|a_i|\leqslant k-1,i=1,2,\cdots,n$.

（注 在证明存在某些有界量使相关的不等式成立时，可考虑把某区间划分为若干个小区间形成抽屉，利用抽屉原理来证明.）

例9 某次考试有5道选择题，每题都有4个不同答案供选择，每人每题恰选1个答案. 在2000份答卷中发现存在一个n，使得任何n份答卷中都存在4份，其中每两份的答案都至多3题相同. 求n的最小可能值. （2000年CMO试题）

分析 利用抽屉原理证明$n\geqslant25$，然后对$n=25$时进行构造.

解 n的最小可能值为25.

将每道题的4种答案分别记为1,2,3,4. 每份试卷上的答案记为(g,h,i,j,k)，其中$g,h,i,j,k\in\{1,2,3,4\}$.

令$\{(1,h,i,j,k),(2,h,i,j,k),(3,h,i,j,k),(4,h,i,j,k)\}$，其中$h,i,j,k=1,2,3,4$.

共得256个四元组.由于$2000=256\times7+208$，故由抽屉原理知有8份考卷上的答案属于同一个四元组.取出这8份考卷后，余下的1992份中仍有8份属于同一个四元组；取出这8份考卷，余下的1984份中又有8份属于同一个四元组；取出这8份考卷，连同前两次取出的考卷共有24份.在这24份考卷中，任何4份中总有两份的答案属于同一个四元组，当然不能满足题目的要求.所以，所求的最小值$\geqslant25$.

另一方面，令

$S=\{(g,h,i,j,k)\mid g+h+i+j+k\equiv0(\text{mod}4),g,h,i,j,k\in\{1,2,3,4\}\}$，

则$|S|=256$，且S中任何两种答案都至多有3题相同.

从S中去掉6个元素，当余下的250种答案中的每种答案都恰有8人选用时，共得到2000份答卷，其中的任何25份答卷中，总有4份不相同.由于它们都在S中，当然满足题中要求.这表明$n=25$时，可以满足题中要求.

综上可知，所求的n的最小可能值为25.

例10 由1600名议员组成16000个委员会，每个委员会由80名议员组成.证明：一定有这样的两个委员会，它们至少有4名公共的成员.

证明 记$n=1600$，$m=16000$.若一个议员参加了k个委员会，则让这k个委员会两两配成C_k^2对.以k_i表示第i名议员参加的委员会的个数，则

$k_1+k_2+\cdots+k_n=80m$.

而他们参加的委员会的对数之和为

$$C_{k_1}^2+C_{k_2}^2+\cdots+C_{k_n}^2=\frac{1}{2}(k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2)-40m$$

$$\geqslant\frac{1}{2n}(k_1+\cdots+k_n)^2-40m$$

$$=\frac{1}{2n}(80m)^2-40m=2m^2-40m(n=1600).$$

现用反证法证明原题，反设m个委员会中任意2个委员会至多有3名相同的议员，那么上述所说的委员会的对数之和不超过$3C_m^2$，即

$2m^2-40m\leqslant3C_m^2$.

$4m-80\leqslant3(m-1)$，

$m\leqslant77$，与$m=16000$矛盾.

因此，一定存在两个委员会，它们至少有4名相同的议员.

组合问题灵活多变的特点，决定了解法的多样性，灵活性，而并不是一成不变地用某个技巧能解决的.

同步检测2

1. 已知1与90之间的19个(不同)正整数,两两的差中是否一定有三个相等?

2. 在1,4,7,10,13,…,100中任选出20个数,其中至少有不同的两对数,其和都等于104,试证明之. (第39届美国普特南数学竞赛题)

3. 设$a_1,a_2,a_3,\cdots$,是严格上升的自然数列:$a_1<a_2<a_3<\cdots$.

求证:在这个数列中有无穷多个a_m可以表示为$a_m=xa_p+ya_q$,其中p,q是两个正整数,且$p\neq q$,而x,y是两个适当的整数.

4. 设a_j,b_j,c_j为整数,这里$1\leqslant j\leqslant N$,且对任意的j,数a_j,b_j,c_j中至少有一个为奇数.证明:存在整数r,s,t,使得集合$\{ra_j+sb_j+tc_j\mid 1\leqslant j\leqslant N\}$中,至少有$\frac{4N}{7}$个数为奇数.

5. 若一整数n既不是2的倍数也不是5倍数,则n必能整除一个各位数都是1的数.

6. 证明平面上的整点凸五边形的面积不小于$\frac{5}{2}$.

7. 假设有m个点,在各线段上任意染n色,存在同色三角形,那么对$(n+1)(m-1)+2$个点,在各线段上任意染$n+1$色,也必有同色三角形.

8. 在一条纸带上依次写有80个非零数字,并将纸带剪成若干段,使每段带子上至少有两个数字,于是每段带子上的数字组成一个自然数,再将所得的这些自然数求和.试证至少存在两种不同的剪法,使得最后所加得的和数相等.

9. 用k种颜色给直角坐标平面中某些整点染色,使得任何半径为c的圆内部至少有一个染了色的整点.

求证:存在一个四个顶点染了相同颜色且各边平行于坐标轴的矩形.

第3讲 容斥原理

知识点金

容斥原理又称为包含排斥原理，它是解决组合计数问题的一个重要工具.

容斥原理：

定理1 把集合 A 分为两个集合 A_1 与 A_2 之并，即 $A=A_1\cup A_2$，则有

$|A|=|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$.

把集合 A 分为三个集合 A_1,A_2,A_3 之并，则有

$$|A|=|A_1\cup A_2\cup A_3|$$
$$=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_2\cap A_3|-|A_3\cap A_1|+|A_1\cap A_2\cap A_3|,$$

一般地，设 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n\subset A$，则有

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum|A_i|-\sum|A_i\cap A_j|+\sum|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.$$

其中各求和记号下的和项取遍所有可能的不同下标的组合.

证明 设 $x\notin A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，则 x 对上式左边的贡献为0，因为 x 也不属于右边各交集，所以 x 对右边的贡献也为0，等式成立. 设 $x\in A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，且恰好属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的 m 个集合，此时 x 对上式左边的贡献为1，而右边的贡献可通过对各和式的贡献求得. 记

$$M_1=\sum_{i=1}^{n}|A_i|,$$

$$M_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|,$$

…

$$M_k=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|,$$

…

$$M_n=|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|,$$

容斥原理右边即为 $M_1-M_2+M_3-M_4+\cdots+(-1)^{n-1}M_n$. 因为 x 恰好属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的 m 个集合,所以,当 $k\leqslant m$ 时,x 对 M_k 的贡献是 C_m^k;当 $k>m$ 时,x 对 M_k 的贡献是 0. 因此,x 对 $M_1-M_2+M_3-M_4+\cdots+(-1)^{n-1}M_n$ 的总贡献是

$$C_m^1-C_m^2+C_m^3-C_m^4+\cdots+(-1)^{m-1}C_m^m=1.$$

这表明,此时等式也成立. 因此,对任意 $x\in A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k$,等式都成立.

定理 2 (逐步淘汰原理)设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是集合 S 的 k 个子集合,则

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_k}|$$
$$=|S|-\sum_{1\leqslant i\leqslant k}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\leqslant i<j<l\leqslant k}|A_i\cap A_j\cap A_l|+\cdots$$
$$+(-1)^k|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|.$$

例题精析

例 1 设 n 与 k 是正整数,$n>3$,$\frac{n}{2}<k<n$,平面上有 n 个点,其中任意三点不共线. 试证:如果其中每个点都至少和其他 k 个点用线段连接,则连接的线段中至少有三条围成一个三角形.

分析与证明 因为 $n>3$,$\frac{n}{2}<k<n$,所以 $k\geqslant 2$. 这表明:n 个点中必有两个点 a 与 b,它们之间可连一线段. 把余下的点构成的集合记作 X,X 中用线段与 a 连接的所有点的集合记作 A,而与 b 连接的所有点的集合记作 B. 显然,$A\cup B$ 是 X 的子集,因此 $|A\cup B|\leqslant|X|=n-2$. 另一方面,由已知条件 $|A|\geqslant k-1$,$|B|\geqslant k-1$,则根据容斥原理,

$$n-2\geqslant|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|\geqslant 2k-2-|A\cap B|,$$

从而 $|A\cap B|\geqslant 2k-n>0$.

这就证明了 $A\cap B\neq\varnothing$,即 $A\cap B$ 中必有一点 c,它与 a,b 构成一个 $\triangle abc$.

例 2 对某班30个学生进行调查,结果如下:19 人喜欢数学,17 人喜欢物理,11 人喜欢化学,12 人喜欢数学和物理,7 人喜欢物理和化学,5 人喜欢化学和数学,2 人喜欢数学、物理、化学. 问数学、物理两科中至少喜欢一科的有多少人? 对数学、物理、化学都不喜欢的人数又有多少?

分析与解 设 S 为全体学生的集合，A_1, A_2, A_3 分别为喜欢数、理、化的学生组成的集合，则

$|S|=30, |A_1|=19, |A_2|=17, |A_3|=11, |A_1 \cap A_2|=12, |A_2 \cap A_3|=7, |A_1 \cap A_3|=5, |A_1 \cap A_2 \cap A_3|=2.$

由容斥原理知，数、理两科中至少喜欢一科的学生人数为

$|A_1 \cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1 \cap A_2|=19+17-12=24.$

由容斥原理知，数、理、化三科都不喜欢的学生人数为

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|=|S|-\sum_{i=1}^{3}|A_i|+\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant 3}|A_i \cap A_j|-|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$
$$=30-19-17-11+12+5+7-2=5.$$

例 3 由数字1,2和3组成 n 位数，要求 n 位数中 1,2 和 3 的每一个至少出现一次. 求所有这种 n 位数的个数.

分析与解 由数字 1,2 和 3 组成的 n 位数全体构成的集合记作 S，则 $|S|=3^n$.

将 S 中所有不含 k 的 n 位数的集合记作 $A_k(k=1,2,3)$，则 $\overline{A_k}$ 是 S 中所有含有数字 k 的 n 位数的集合. $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$ 即是 S 中同时含有数字 1,2 和 3 的 n 位数全体构成的集合. 由容斥原理，

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|=|S|-\sum_{i=1}^{3}|A_i|+\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant 3}|A_i \cap A_j|-|A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

因为 $A_k(k=1,2,3)$ 是 S 中所有不含数字 k 的 n 位数的集合，所以 $|A_k|=2^n$, $A_i \cap A_j$ 是所有不含数字 i 和 j 的 n 位数的集合，所以 $|A_i \cap A_j|=1, 1 \leqslant i<j \leqslant 3$.

显然 $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|=0$.

所以满足此题要求的 n 位数的个数为 $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|=3^n-3 \times 2^n+3$.

例 4 8个乘客随意登上 6 节车厢，使得恰有两节车厢空着的上车方式有多少种？

分析 运用逐步淘汰原理.

解 不妨先假设 5,6 节车厢空着，1,2,3,4 车厢均有人. 此时 8 个人随意踏上四节车厢的方式数为 $|I|=4^8$，又以 A_i 表示第 i 节车厢空着的上车方式，那么 $|A_i|=3^8(i=1,2,3,4)$. 而

$|A_i \cap A_j|=2^8(1 \leqslant i<j \leqslant 4)$,

$|A_i \cap A_j \cap A_k|=1(1 \leqslant i<j<k \leqslant 4)$,

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|=0$.

根据逐步淘汰原理，有

$$|\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \overline{A_4}|$$
$$=|I|-\sum_{i=1}^{4}|A_i|+\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant 4}|A_i \cap A_j|-\sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant 4}|A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$+|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|$

$=4^8-C_4^1\cdot 3^8+C_4^2\cdot 2^8-C_4^3\cdot 1+C_4^4\cdot 0$

$=4^8-4\times 3^8+6\times 2^8-4=40824.$

再考虑6节车厢中有2节车厢空的情形有 $C_6^2=15$ 种，故四节皆不空而另两节空的上车方式数是 $40824\times 15=612360$ 种.

例5 记 S 为不超过 n 的正整数，S 中与 n 互素的数的个数记为 $\varphi(n)$，称为欧拉函数.

例如，$\varphi(2)=1$，$\varphi(3)=2$，$\varphi(8)=4$. 设 $p_i(i=1,2,\cdots,m)$ 为 n 的全部质因数，

求证：$\varphi(n)=n\cdot\sum\limits_{i=1}^{m}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$.

分析与解 设 $A_i=\{a\mid a\in S,p_i\mid a\}$，$i=1,2,\cdots,m$，

则 $\varphi(n)=n-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m|$.

注意到

$$|A_i|=\left[\frac{n}{p_i}\right],$$

$$|A_i\cap A_j|=\left[\frac{n}{p_ip_j}\right],\cdots,$$

$$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|=\left[\frac{n}{p_1\cdot p_2\cdots p_m}\right],$$

由于 p_i 为 n 的不同的质因数，上面的取整括号[]均可以去掉. 由容斥原理，得

$$\varphi(n)=n-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n}{p_i}\right]+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}\left[\frac{n}{p_i\cdot p_j}\right]-\cdots+(-1)^m\left[\frac{n}{p_1\cdot p_2\cdots p_m}\right]$$

$$=n\left(1-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}\frac{1}{p_i\cdot p_j}-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{n}{p_1p_2\cdots p_m}\right)$$

$$=n\sum_{i=1}^{m}\left(1-\frac{1}{p_i}\right).$$

原题得证.

例6 集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 的全部元素的一种排列是 $t_1,t_2,\cdots,t_n$. 若任何一个 $t_i\neq i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，这样的排列 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 叫做错位排列. 用 D_n 表示 n 个元素的错位排列数，

求证：$D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$.

分析与解 设 $1,2,\cdots,n$ 的全排列 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 的集合为 I，把使 $t_i=i$ 的全排列的集合记为 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则 $D_n=|I|-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$.

所以 $D_n=n!-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$.

注意到 $|A_i|=(n-1)!$，$|A_i\cap A_j|=(n-2)!$，$\cdots$，

$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|=0!=1$，

由容斥原理，

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=n(n-1)!-C_n^2(n-2)!+C_n^3(n-3)!+\cdots+(-1)^nC_n^n\cdot 0!$$
$$=n!\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right).$$

所以 $D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$.

例 7 设 n 为一正整数，$A_1,A_2,\cdots,A_{2n+1}$ 是某个集合 B 的子集，且有

(1)每个 A_i 恰含 $2n$ 个元素；

(2)$A_i\cap A_j(1\leqslant i<j\leqslant 2n+1)$恰含有一个元素；

(3)B 中每一个元素至少属于两个子集 A_i.

问对于每个 n 值，是否可以对 B 中的每一个元素贴上一张写有 0 或 1 的标签，使得每个 A_i 中恰有 n 个贴有 0 的标签的元素？

分析与解 当且仅当 n 为偶数时结论成立.

用 $2n+1$ 个点表示 $A_1,A_2,\cdots,A_{2n+1}$，当 A_i,A_j 有公共元素 a_{ij} 时，就在 A_i,A_j 间连一条边并记上 a_{ij}，否则不连边. 因为 $|A_i\cap A_j|=1$，故每两点间均有且仅有一条边；又 B 中每一个元素至少属于两个子集，故每一元素均有一条边表示. 这样，可得到完全图 K_{2n+1}.

由于 B 的两个元素均有一条边可代表，故

$|B|\leqslant K_{2n+1}$ 的边数 $=C_{2k+1}^2=n(2n+1)$.

又因为 $B=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{2n+1}$，

$$\text{所以 } |B|=\sum_{i=1}^{2n+1}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2n+1}|A_i\cap A_j|+\cdots$$
$$\geqslant\sum_{i=1}^{2n+1}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2n+1}|A_i\cap A_j|$$
$$=2n(2n+1)-C_{2n+1}^2=n(2n+1).$$

所以 $|B|=n(2n+1)=C_{2n+1}^2$.

令完全图 K_{2n+1} 的每一个顶点 V_i 表示一个子集 A_i，每一条边，$(V_i,V_j)=b_{ij}(i\leqslant i\leqslant 2n+1,i\neq j)$表示 A_i 与 A_j 所共有的哪个元素.

于是问题就转化为：对怎样的 n，可以给 K_{2n+1} 的每边贴一个 0 或 1 的标签，使得从图中任意一点 V_i 出发的 $2n$ 条边中恰有 n 条贴有 0 的标签.

因为 K_{2n+1} 有 $n(2n+1)$ 条边，如果上述贴标签的要求能够满足，则贴 0 的边共有 $\frac{1}{2}n(2n+1)$条，于是，n 必为偶数.

反之，若 $n=2m$ 是偶数，我们把 K_{2n+1} 中的边 $(V_i,V_{i-m}),(V_i,V_{i-m+1}),\cdots,(V_i,$

$V_{i-1}),(V_i,V_{i+1}),\cdots,(V_i,V_{i+m})(i=1,2,\cdots,2n+1)$全部标上0,其余的标上1,则得本题所要求的贴标签方法(注意,顶点的下标的注记法是按模 $2n+1$ 进行的,即 $V(2n+1)+i=V_i$).

所以,当且仅当 n 为偶数时,可以满足要求.

例8 已知 $N=1990^{1990}$,求满足条件 $1\leqslant n\leqslant N$ 且 $(n^2-1,N)=1$ 的整数 n 的个数.

分析与解 因为 $1990=2\times5\times199$,

所以 $(n^2-1,N)=1\Leftrightarrow n^2-1\not\equiv0(\bmod 2,\ \bmod 5,\ \bmod 199)$,即 $n\not\equiv1(\bmod 2)$ 且 $n\not\equiv1,4(\bmod 5)$ 且 $n\not\equiv1,198(\bmod 199)$.

令 $S=\{1,2,\cdots,N\}$,规定 S 的如下子集:

$A=\{n\mid n\equiv1(\bmod 2)\}$,

$B=\{n\mid n\equiv1$ 或 $4(\bmod 5)\}$,

$C=\{n\mid n\equiv1$ 或 $198(\bmod 199)\}$.

则 $A\cap B=\{n\mid n\equiv1$ 或 $9(\bmod 10)\}$,

$B\cap C=\{n\mid n\equiv1$ 或 $994(\bmod 995)\}$,

$A\cap C=\{n\mid n\equiv1$ 或 $397(\bmod 398)\}$,

$A\cap B\cap C=\{n\mid n\equiv1$ 或 $1989(\bmod 1990)\}$.

所以 $|S|=N,|A|=\dfrac{N}{2},|B|=\dfrac{2N}{5},|C|=\dfrac{2N}{199}$,

$|A\cap B|=\dfrac{2N}{19}$,

$|B\cap C|=\dfrac{2N}{995}$,

$|A\cap C|=\dfrac{2N}{398}$,

$|A\cap B\cap C|=\dfrac{2N}{1990}$.

由容斥原理有

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=N-\frac{N}{2}-\frac{2N}{5}-\frac{2N}{199}+\frac{2N}{10}+\frac{2N}{995}+\frac{2N}{398}-\frac{2N}{1990}$$

$$=\frac{589}{1990}N=1990^{1989}\times589.$$

例9 求长为5的二进制数的个数,要求其中每个1都另一个1相邻.

解 设 S 为长为5的二进制数的集合,性质 p_i 表示长为5的二进制数的第 i 个数字是1且与其相邻的数字是0,A_i 表示 S 中具有性质 p_i 的二进制数的集合,$i=1,2,3,4,5$,则 $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_5}$ 为 S 中每个1都同另一个1相邻的集合.由容斥原理得

$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_5}|=$

$$|S|-\sum_{i=1}^{5}|A_i|+\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|+\cdots-|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5| \qquad (*)$$

其中，

$|S|=2^5,|A_1|=2^3,|A_2|=2^2,|A_3|=2^2,|A_4|=2^2,|A_5|=2^3$,

$|A_1\cap A_2|=0,|A_1\cap A_3|=2,|A_1\cap A_4|=1,|A_1\cap A_5|=2$,

$|A_2\cap A_3|=0,|A_2\cap A_4|=1,|A_2\cap A_5|=1$,

$|A_3\cap A_4|=0,|A_3\cap A_5|=2$,

$|A_4\cap A_5|=0$,

而$|A_i\cap A_j\cap A_k|(i=1,2,\cdots,5;j=1,2,\cdots,5;k=1,2,\cdots,5;i\neq j\neq k)$中只有$|A_1\cap A_3\cap A_5|=1$,其余均为0；

同理，
$$|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l|=0$$
$(i=1,2,\cdots,5;j=1,2,\cdots,5;k=1,2,\cdots,5;l=1,2,\cdots,5;i\neq j\neq k\neq l)$
$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5|=0$$

将以上数值代入式(*)得到

$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_5}|$

$=2^5-(2^3+2^2+2^2+2^2+2^3)+9-1+0-0=12$.

故在长为5的二进制数中，每个1都同另一个1相邻的二进制个数为12个.

例 10 在由a、b、c、d四个字符构成的n位符号串中，求a、b和c均出现的符号串的数目.

解 令S表示由a、b、c、d构成的n位符号串的集合，又令A_1、A_2和A_3分别表示n位符号串中不出现符号a、b和c的集合，则$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$表示符号$a$、$b$和$c$均出现的$n$位符号串的集合. 由容斥原理知

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|S|-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)+|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3| \qquad (*)$$

由于n位符号串中，每一位都可取a、b、c、d四种符号中的一种，故$|S|=4^n$；而不允许出现a的n位符号串的个数应是3^n，即$|A_1|=3^n$. 同理有$|A_2|=3^n$，$|A_3|=3^n$.

又，既不允许出现a，又不允许出现b的n位符号串的个数应是2^n，故有$|A_1\cap A_2|=2^n$. 同理有$|A_1\cap A_3|=2^n$，$|A_2\cap A_3|=2^n$.

显然，有$|A_1\cap A_2\cap A_3|=1$.

将以上数值代入式(*)即得
$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=4^n-3\cdot 3^n+3\cdot 2^n-1.$$

故a、b和c均出现的符号串的数目是$4^n-3\cdot 3^n+3\cdot 2^n-1$.

例 11 求集合 $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ 的全排列中，abc 和 $efgh$ 均不出现的全排列个数.

解 令 S 表示集合 A 中所有全排列组成的集合，p_1 表示在 S 中的一个排列出现 abc 这一性质，p_2 表示在 S 中的一个排列出现 $efgh$ 这一性质，$A_i(i=1,2)$ 表示 S 中具有性质 p_i 的排列所组成的集合，则 $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$ 表示不出现 abc 也不出现 $efgh$ 的排列所组成的集合由容斥原理有

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}|=|S|-(|A_1|+|A_2|)+|A_1\cap A_2|$$

而 $|S|=8!$. A_1 的一个排列相当于集合 $\{abc,d,e,f,g,h\}$ 的一个排列，故

$$|A_1|=6!,$$

同样，A_2 的一个排列相当于集合 $\{a,b,c,d,efgh\}$ 的一个排列，故

$$|A_2|=5!,$$

而 $A_1\cap A_2$ 的一个排列相当于集合 $\{abc,d,efgh\}$ 的一个排列，故

$$|A_1\cap A_2|=3!.$$

所以 $$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}|=8!-(6!+5!)+3!=39486.$$

于是，在集合 A 的全排列中，abc 和 $efgh$ 均不出现的全排列个数是 39486.

例 12 在所有的 n 位数中，包含数字 3、8、9 但不包含数字 0、4 的数有多少个？

解 除去 0，4，则在 1，2，3，5，6，7，8(这 8 个数字组成的 n 位数中；令 S 表示由这 8 个数字组成的所有 n 位数的集合. 则 $|S|=8^n$；

令 p_1 表示这样的性：一个 n 位数不包含 3；

令 p_2 表示这样的性：一个 n 位数不包含 8；

令 p_3 表示这样的性：一个 n 位数不包含 9；

令 A_i 表示 S 中具有性质 p_i 的元素构成的集合($i=1,2,3$).

则 $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$ 表示 S 中包含 3，又包含 8，又包含 9 的所有 n 位数的集合.

由容斥原理得

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|S|-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)$$
$$+(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|)-|A_1\cap A_2\cap A_3|,$$

而 $|A_1|=7^n,|A_2|=7^n,|A_3|=7^n$.

$|A_1\cap A_2|=6^n,|A_1\cap A_3|=6^n,|A_2\cap A_3|=6^n$,

$|A_1|\cap|A_2|\cap|A_3|=5^n$.

代入上式得

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=8^n-3\cdot 7^n+3\cdot 6^n-5^n.$$

故所求的 n 位数有 $8^n-3\cdot 7^n+3\cdot 6^n-5^n$ 个.

例 13 把 n 本不同的书放入 m 个有编号的箱子中($n\geqslant m$)，使得没有一个箱子为空.

问共有多少种放法？

解 令 S 表示把 n 本不同的书任意放入 m 个有编号箱子的所有放法所组成的集合，显然有 $|S|=m^n$.

令 $p_i(i=1,2,\cdots,m)$ 表示箱子 i 为空这一性质，$A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 表示 S 中具有性质 p_i 的元素所组成的集合，则 $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_m}|$ 表示没有一个箱子为空的元素所组成的集合. 由容斥原理知

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_m}|=|S|-\sum|A_i|+\sum|A_i\cap A_j|-\sum|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|.$$

因 A_i 表示 S 中第 i 个箱子为空的所有放法所组成的集合，这就是说，第 i 个箱子为空时，n 本不同的书只有放入 $(m-1)$ 个箱子中去，而每本书有 $m-1$ 种选择，因此 n 本书就有 $(m-1)^n$ 种方法. 即

$$|A_i|=(m-1)^n(i=1,2,\cdots,m),$$

而 $A_i\cap A_j$ 则表示第 i 个和第 j 个箱子为空时的所有放法的集合

$$|A_i\cap A_j|=(m-2)^n(i\neq j;i=1,2,\cdots,m).$$

一般地，对于 m 个箱子取 k 个箱子为空的组合 $\{i_1i_2\cdots i_k\}$ 有

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|=(m-k)^n(k=1,2,\cdots,m),$$

而对于 $k=1,2,\cdots,m$，在 m 个带编号的箱子中取 k 个箱子一共有 $\binom{m}{k}$ 种方式，故由乘法规则和容斥原理，可得符合题意的放法数为

$$\begin{aligned}|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_m}|&=m^n-\binom{m}{1}(m-1)^n+\binom{m}{2}(m-2)^n\\&\quad-\binom{m}{3}(m-3)^n+\cdots+(-1)^m\binom{m}{m}(m-m)^n\\&=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n.\end{aligned}$$

同步检测 3

1. 某班同学都参加了数学小组或物理小组的活动，其中参加数学小组的有 36 人，参加物理小组的有 30 人，既参加数学小组又参加物理小组的有 24 人，则该班共有__________人.

2. 从 1 到 10^6 的整数中，至少能被 3,5,7 之一整除的数有__________个.

3. 在小于 1000 的整数中，既不能被 5 整除也不能被 7 整除的有________个.

4. 把 8 张卡片 A,A,B,B,C,D,E,F 排成一列，则相同字母的卡片不许相邻的排法有________种.

5. 从自然数列 1,2,3,4,5,…中依次划去 3 的倍数和 4 的倍数，但是其中凡是 5 的倍数均保留. 划完后剩下的数依次构成一个新的数列：$A_1=1,A_2=2,A_3=5,A_4=7,\cdots$. 求 A_{2006} 的值.

6. 求能被 5 或 7 整除(可能同时被 5 与 7 整除)，但不能被 3 整除的三位数的个数.

7. 满足下列条件的正整数的全体用集合 S 表示："各位数字不相同，且任意两位数字的和不为 9."这里，S 的元素用十进制表示，且 S 含 1 位整数.

试回答下列问题：

(1)在 S 的元素中，4 位数有多少个？

(2)在 S 的元素中，从小到大排列，第 2000 个数是多少？

(2000 年日本东京大学入学试题)

8. 设 $S=\{1,2,3,\cdots,280\}$，求最小的 n，使得 S 中的每 n 个元素都含有 5 个两两互素的数.

第4讲 极端原理

知识点金

极端原理 在有限个实数组成的非空集合中一定有一个最大数,也一定有一个最小数.

利用极端原理解题就是从极端元素出发,经过推理得出结论,或从结论的否定出发利用极端元素导出矛盾,从而推出结论成立.极端的元素是指最大、最小距离,最大、最小边,最大、最小角,最大、最小面积的图形,得分最多、得分最少的队员等等.

例题精析

例1 (1)平面上有 n 个点,$n\geqslant5$,或是红点,或是蓝点,而且任意三个不同色点不共线.证明:存在一个三个顶点同色的三角形,该三角形至少有一条边上不含另一种颜色的点.

(2)空间中有20个点,或是红点,或是蓝点,而且任意四个同色点不共面,证明:存在四个顶点同色的四面体,这个四面体中有某一侧面不含另一种颜色的点.

分析 因为图形个数有限,所以其面积(体积)有最小者,可从极端情况出发导出矛盾.

证明 (1)任意三个同色点,以其为顶点作三角形.因为这种三角形的个数有限,所以这些三角形中必有面积最小的.设其为$\triangle ABC$,并不妨设 A,B,C 均为红色点.下面证明:在$\triangle ABC$ 的某一边上必不含蓝色点,否则即在$\triangle ABC$ 的三边上都有蓝点.

设 AB,BC,CA 上各有蓝点 A',B',C',则$\triangle A'B'C'$也是顶点同色的三角形,只是

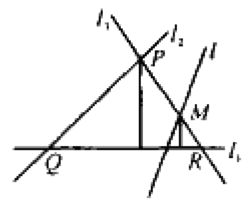
$\triangle A'B'C'$的面积小于$\triangle ABC$的面积，这与面积的最小性矛盾.

(2)任意四个同色点，以其为顶点作一个四面体，所有的同色顶点四面体组成的集合是一个有限集，所以其中必有一个体积最小的，将其设为四面体$ABCD$，并不妨设A，B，C，D都是红色点.下面证明：在四面体$ABCD$的四个侧面中，必有某一个侧面上没有蓝色点，否则，设四个侧面$\triangle ABC$，$\triangle ABD$，$\triangle ACD$，$\triangle BCD$上都有蓝色点，依次为蓝色点A'，B'，C'，D'，则四面体$A'B'C'D'$也是顶点同色的四面体，但四面体$A'B'C'D'$的体积小于四面体$ABCD$的体积，这与四面体$ABCD$体积的最小性矛盾.

例 2 在平面上引$n(n\geqslant 3)$条直线，其中任两条不平行，任三线不共点，这n条直线分平面为若干个区域.证明：这n条直线至少有一条，邻接它的平面区域中有一个是三角形.

分析 利用交点到直线的最小非零距离寻找三角形域.

证明 n条直线两两相交有C_n^2个交点，这些交点到每条直线的距离中一定有一个最小非零距离.设恰是点P到直线l_1有最小距离，且设P是直线l_2与l_3的交点，另设l_2交l_1于Q，l_3交l_1于R，则$\triangle PQR$就是一个与直线相邻接的三角形域.



我们只要证明不会再有其他直线通过$\triangle PQR$即可.如若不然，设有直线过$\triangle PQR$，由于不存在三线共点，所以l不过P，Q，R.则l与PR或PQ之一要相交，不妨设l交PR于M，那么M到l_1的距离将小于P到l_1的距离.这与P到l_1具有最小非零距离这一极端性的选择矛盾.因此，$\triangle PQR$就是一个与直线l_1邻接的三角形域.

例 3 证明：不存在四个自然数x，y，z，u，满足方程$x^2+y^2=3(z^2+u^2)$.

分析 满足方程的自然数解中必有使x^2+y^2最小的，故可利用最小性导出矛盾.

证明 假设存在满足方程的四个自然数，取其中使x^2+y^2最小的.设这四数组是$(x,y,z,u)=(a,b,c,d)$，由方程$a^2+b^2=3(c^2+d^2)$可知，a^2+b^2是3的倍数，容易证明a^2+b^2被3整除的充要条件是a与b都被3整除.

又，设$a=3m$，$b=3n$，则$a^2+b^2=9m^2+9n^2=3(c^2+d^2)$，从而得$c^2+d^2=3(m^2+n^2)$.这样，$c$，$d$，$m$，$n$满足原方程且$c^2+d^2<a^2+b^2$.这与$a^2+b^2$的最小性选择矛盾.因此，不存在$a$，$b$，$c$，$d$这样的四个自然数，使得方程$a^2+b^2=3(c^2+d^2)$成立.

例 4 某班共30名学生，每一名学生在班内都有同样多的朋友.试问，比自己的大多数朋友的成绩都要好的学生最多可能有多少名(假定对该班任何两个学生的成绩，都可以比出谁好谁差)?

分析 考虑极端元素(成绩最好的学生或最差的学生).

解 将成绩比自己的大多数朋友都好的学生称为“好学生”，设共有x名“好学生”，并设每名学生各有k个朋友，班上最好的学生在k个“朋友对”中都是成绩好的，而其余

每个"好学生",都至少在$\left[\frac{k}{2}\right]+1\geqslant\frac{k+1}{2}$个"朋友对"中是成绩好的. 于是,"好学生"们至少一共在$k+\frac{(x-1)(k+1)}{2}$个"朋友对"中是成绩好的,且这个数目不会超过班内的"朋友对"的总数,即$\frac{30k}{2}=15k$. 由此可知$x\leqslant 28\times\frac{k}{k+1}+1$.

另一方面,因为班内比最差的"好学生"成绩还差的学生不多于$30-x$个,

因此,又有$\frac{k+1}{2}\leqslant 30-x$.

综合可得$x\leqslant 28\times\frac{59-2x}{60-2x}+1$,

即$x^2-59x+856\geqslant 0$.

满足上式和条件$x\leqslant 30$的最大整数是$x=25$,所以"好学生"的个数不超过25个.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30

下面证明可以达到25个. 将全班学生按成绩由好到坏的顺序依次编为1至30号,并且将这些号码列成一张6×5的数表(如图). 假定某两个学生是一对朋友,只要他们的号码在表中属于如下3种情况:(1)处于相邻的行且位于不同的列中;(2)处于同一列但其中一位位于最下端的行中;(3)同在最上面一行中. 容易验证,所述条件皆可满足.

例5 设集合$A=\{1,2,3,\cdots,2n+1\}$,求一个包含元素个数最多的集合A的子集B,使集合B中的任意三个元素a,b,c,都有$a+b\neq c$.

分析与解 考察最大数,若$2n+1\in B$,则由于

$1+2n=2+(2n-1)=3+(2n-2)=\cdots=n+(n+1)$,

所以$\{1,2n\},\{2,2n-1\},\cdots,\{n,n+1\}$这$n$个集合中每一个集合的元素中至多有一个在集合$B$中,可见集合$B$中至多有$n+1$个元素.

若$2n+1\notin B$,且$2n\in B$,因为

$1+(2n-1)=2+(2n-2)=\cdots=n-1+(n+1)$,

同理可证,不论集合B中最大的元素怎样,集合B中的元素最多只有$n+1$个.

另一方面,令$B=\{n+1,n+2,\cdots,2n+1\}$,此时$|B|=n+1$,故集合$B$符合要求.

例6 在某种比赛中,每一个选手都恰与其他选手比赛一局,每局赢者得1分,输者得0分,平局各得0.5分. 比赛结束后,发现每个选手所得的分数中恰好有一半是在他同10位得分最低的选手的对局中得到的(10位得分最低的选手所得的分数中有一半是在他们彼此对局中得到的). 求参加比赛的选手的总数. (第3届美国数学邀请赛)

分析 考虑极端元素(得分最低者).

解 设共有n名选手,则他们共得C_n^2分. 10位得分最低的选手通过彼此间对局共得$C_{10}^2=45$分,这是他们所得分数之半,故他们10位共得90分. 其余的$n-10$位选手在他们

彼此间对局中共得 C_{n-10}^2 分，这也是他们所得分数之半，故这 $n-10$ 位选手共得 $2C_{n-10}^2$ 分．于是，得

$C_n^2=90+2C_{n-10}^2$，

即 $n^2-41n+400=0$．

解得 $n=16$ 或 25．

但若只有 16 位选手，那么就有 6 位得高分者，他们共得 30 分，平均每人 5 分，而 10 位得低分者平均每人得 $90\div10=9$ 分，矛盾．

所以 $n=25$，即共有 25 位参赛选手．

例 7 设 E 是平面上$2n$ 个点构成的集合，其中任意三点不共线．现将其中 n 个点涂成红色，n 个涂成蓝色．试证：总可找到两两没有公共点的 n 条线段，使其中每条线段的两个端点不同色． （第 40 届美国大学生竞赛题）

分析与解 将 n 个红点，n 个蓝点两两配对的方法记为 P，这样的配对方法共有 $n!$ 种．令 $S(P)$ 表示配对方法 P 所对应的 n 条端点不同色的线段的长度和，于是，必存在配对方法 P_0 使 $S(P_0)=\min\{S(P)\}$．

下证配对方法 P_0 所对应的 n 条端点不同色的线段必不相交．否则，若其中存在两条线段 A_1B_2 和 A_2B_1 相交，其中 A_1，A_2 为红色，B_1，B_2 为蓝色，则用 A_1B_1、A_2B_2 代替 A_1B_2，A_2B_1，其他点间的连结方式不变，就可得到一个新的配对方式 P'．由于 $A_1B_2+B_2B_1>A_1B_1+A_2B_2$，因此 $S(P_0)>S(P')$，这与 $S(P_0)$的最小性矛盾．故用配对方式 P_0 可以组成没有公共点的 n 条线段，而同一段线的两个端点不同色．

例 8 在平面上有 m 个给定点，已知在它们的两两距离之中一共只有不超过 n 种不同的距离．求证：$m\leqslant(n+1)^2$．

分析 考虑点的位置的极端情形．

证明 将 m 个给定点分别记作 A_1，A_2，…，A_m，将 n 种不同的距离分别记为 r_1，r_2，…，r_n．于是，对任何 $1\leqslant i,j\leqslant m$，都有 $A_iA_j\in\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}$．如果以 $O(X,r)$表示以点 X 为圆心、以 r 为半径的圆周，那么，对于每个 i，除了点 A_i 以外的其余 $m-1$ 个点都分布在 n 个圆周 $O(A_i,r_1)$，$O(A_i,r_2)$，…，$O(A_i,r_n)$之上．

建立平面直角坐标系，使坐标轴不平行于任何一条直线 $A_iA_j(1\leqslant i<j\leqslant m)$，并考察横坐标最小的给定点，且设为 A_1．

在直线 A_1A_2，A_1A_3，…，A_1A_m 中选取斜率最大的一条，不妨设为 A_1A_2，于是，点 A_3，A_4，…，A_m 都位于平面上直线 A_1A_2 的同一侧．

由题设，点 A_2，A_3，…，A_m 中的每一个都是某两个圆周 $O(A_1,r_k)$与 $O(A_2,r_l)$的交点，其中 $k,l\in\{1,2,\cdots,n\}$．

这样的圆周共有 n^2 对，其中的每一对圆周都至多有一个交点属于 A_3，A_4，…，A_m 所

在的半平面. 因此, 在 $A_3, A_4, \cdots, A_m$ 中至多有 n^2 个不同的点.

故 $m-2 \leqslant n^2$, 从而 $m \leqslant n^2+2<(n+1)^2$.

例 9 已知 N 支排球队参加比赛, 每支球队与其他任一支球队只比赛一场. 一支球队获胜积 1 分, 失败积 0 分(无平局). 若任意四支球队之间进行的比赛中, 至少有两个队积分相同. 求 N 的最大值.

分析 考虑极端元素(得分最多者).

解 考虑积分最多的球队, 设为 A. 假设球队 A 至少胜了四场, 不妨设 A 胜了球队 B, C, D, E. 不妨考虑其中的三支球队 B, C, D, 则 B, C, D 中任一支球队在四支球队 A, B, C, D 之间进行的比赛中只胜一场, 亦即在 B, C, D 之间进行的比赛中各胜一场.

	A	B	C	D	E	F	G
A	\	1	1	1	0	0	0
B	0	\	1	0	0	1	1
C	0	0	\	1	1	1	0
D	0	1	0	\	1	0	1
E	1	1	0	0	\	1	0
F	1	0	0	1	0	\	1
G	1	0	1	0	1	0	\

所以, 球队 B, C, D, E 中的任一支球队在这四个队之间进行的比赛中只胜了一场, 矛盾. 因此, 每支队最多胜了三场.

若 N 支球队参加比赛, 则所有球队所得的分数之和最多为 $3N$, 于是 $C_N^2 \leqslant 3N$, 解得 $N \leqslant 7$.

又由图可知, 七支球队满足条件.

故 N 的最大值为 7.

例 10 设 X 是有限集合, n_0 是给定的正整数, 法则 f 使 X 的每一个偶子集(由偶数个元素组成的子集)都对应一个实数 $f(E)$, 且满足下列条件:

(1) 存在 X 的一个偶子集 D, 使 $f(D)>n_0$.

(2) 对 X 的任意两个不同相交的偶子集 A 与 B, $f(A \cup B)=f(A)+f(B)-n_0$.

求证: 存在 X 的子集 P, Q 使

(a) $P \cup Q=X, P \cap Q=\varnothing$;

(b) 对 P 的任意非空偶子集 S, 有 $f(S)>n_0$;

(c) 对 Q 的任意偶子集 T, 有 $f(T) \leqslant n_0$.

证明 因 X 的偶子集 E 的个数有限, 故 $f(E)$ 必然能取到最大值, 由(1)知 $f(E)$ 的最大值小于 n_0.

设 P 是使 $f(E)$ 取最大值的所有偶子集中元素最少的一个偶子集, 并设 $Q=X \backslash P$. 显然 (a) $P \cup Q=X, P \cap Q=\varnothing$.

(b) 对任何的非空偶子集 S, 令 $\bar{S}=P \backslash S$, 取 $\bar{S}$ 是偶子集, 且 $\bar{S}$ 中元素少于 P 中元素个数, 因此, $f(\bar{S})<f(p)=f(S)+f(\bar{S})-n_0$, 从而 $f(S)>n_0$.

(2) 对 Q 的任意子集 T, 由于 $P \cap T=\varnothing$ 且 $P \cup T$ 是偶子集, 所以 $f(P) \geqslant f(P \cup T)=f(P)+f(T)-n_0$, 从而 $f(T) \leqslant n_0$.

同步检测4

1. 证明：如果一个三角形的所有边都小于1，则它的面积小于$\frac{\sqrt{3}}{4}$.

2. 由凸多边形的内点向它的边引垂线，证明至少有一个垂足位于它的边上而不在它的延长线上.

3. 有 n 个男生，m 个女生($n,m\geqslant 2$)，每个男生至少与一个女生彼此相识，每个女生不全认识 n 个男生. 证明：在他们当中，必有两个男生与两个女生，其中每个男生恰好认识其中一女生，其中每个女生恰好认识其中一男生.

4. 运动员参加循环赛，其中每两人都比赛一场，每场比赛都一定决出胜负而没有平局. 试证在这些运动员中，必可找到这样的运动员，使得其余的所有运动员都或者是他的手下败将或者负于他的某个手下败将.

5. 求最大的整数 A，使对于由 1 到 100 的全部正整数的任一个排列，其中都有 10 个位置相邻的数，其和不小于 A.

6. 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 $2n$ 个正数，且 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=1$，$\sum_{i=1}^{n}b_i^2=1$，求证：$\frac{a_1}{b_1}$，$\frac{a_2}{b_2}$，$\cdots$，$\frac{a_n}{b_n}$中一定存在一个不大于1的数.

7. 一口袋中装有 100 只红袜子，80 只绿袜子，60 只蓝袜子，40 只黑袜子. 现在某人从袋子里摸袜子，每次摸一只(看不到袜子颜色). 为了确保摸出的袜子中至少有十双同色，则至少需摸出多少只袜子？

8. 平面上任给 1995 个不在同一条直线上的点，求证：存在经过三个已给点的圆，使得所有的 1994 个点都不在该圆的内部.

9. 已知由 25 个点组成的点集 M，每三点中都有两点的距离小于 1. 证明：用半径为 1 的圆能覆盖 M 中的 13 个点.

第5讲 组合几何

知识点金

组合几何是用组合数学的理论来解决几何学中的问题，主要研究几何图形的拓扑性质和有限制条件的欧几里得性质. 它试图研究不定形或不定位的复杂图形，例如任意的离散点集，平面上的任意曲线与图形，空间中的曲面与立体等.

组合几何以内容丰富、题目新颖、难度有层次而在竞赛数学中大放异彩.

例题精析

例1 平面上有 n 个点，若其中任意四个点都是凸四边形的四个顶点，则这 n 个点是一个凸边形的顶点.

分析与解 考虑 n 个点的凸包. 假设这 n 个点中某点 A 不是凸包多边形的顶点，A 将位于凸包多边形的内部或边上. 由某个顶点引出对角线可以分这个凸多边形为若干个三角形，点 A 必属于其中某个三角形，则这个三角形的顶点及点 A 这四个点就不是一个凸四边形的四个顶点，与已知矛盾. 所以这 n 个点是凸包多边形的顶点，从而这 n 个点构成凸 n 边形.

例2 在平面上任给100个点，试证可以用若干个不相交的圆面来覆盖它们，使得这些圆面的直径之和小于100，且任何两圆之间的距离大于1(两个不交的圆的距离是指它们的两个最近点之间的距离).（1966年全俄数学奥林匹克）

分析 首先以每个点为圆心，$\frac{1}{2}$为半径作圆，然后进行调整.

证明 以每个给定点为圆心，以$\frac{1}{2}$为半径作圆，则这些圆的直径之和为 100，若上述圆中有两个圆相交(含相切)，则用包含两圆在内的最小圆代替二者. 显然，后面得到的圆的直径不会超过前两圆的直径之和. 这样处理下去直到所得到的圆互不相交为止，此时得到的所有圆的直径之和不超过 100，并且每个给定点到覆盖它的圆面的边界的距离不小于$\frac{1}{2}$.

因为这些圆两两相离，且只有有限个，故可设最小距离为$r(r>0)$，若$r>1$，则所得的这一组圆已满足题设；若$r\leqslant1$，将上面所得的所有圆的半径都缩小$\frac{1}{2}-\frac{r}{3}$，重新作圆，则所得的一组圆满足题设.

例 3 在凸 100 边形内部标出了k个点($2\leqslant k\leqslant50$). 求证：可从该 100 边形的顶点中选出$2k$个点，使得所标出的k个点全部落在已选出的$2k$个点为顶点的$2k$边形的内部.

(1994 年全俄数学奥林匹克)

分析与解 设多边形$M=A_1A_2\cdots A_n$是k个标定点的凸包，于是$n\leqslant k$. 设O是M内部的一点. 对每个$i\in\{1,2,\cdots,n\}$，连接OA_i并延长，交凸 100 边形的周界于点B_i，记$\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$的凸包为M'，则M包含于M'的内部.

事实上，对于M上的任一点P，直线OP与M的周界交于两点. 记这两个交点分别位于M的边A_iA_{i+1}和A_jA_{j+1}上. 于是，由$B_1,B_2,\cdots,B_n$的取法便知直线OP与线段B_iB_{i+1}，B_jB_{j+1}分别相交. 记交点为S和T. 因为$B_i,B_{i+1},B_j,B_{j+1}\in M'$，所以$S,T\in M'$，从而$O,P\in M'$，即证明了$M\subset M'$.

设$M'=C_1C_2\cdots C_m$，于是$m\leqslant n\leqslant k$，所有C_i都在给定的凸 100 边形的周界上. 考察这些C_i所在的凸 100 边形的边的端点的集合G，可知$|G|\leqslant2k$. 再任选凸 100 边形的$2k-|G|$个顶点补入G，则G便恰有$2k$个点，且以G中所有点为顶点的凸$2k$边形包含有C_1，$C_2,\cdots,C_m$. 故，当然含有M'，从而包含所有k个给定点.

例 4 平面上任给五个相异的点，它们之间的最大距离与最小距离之比记为λ. 求证：$\lambda\geqslant2\sin54°$，并讨论等号成立的充要条件. (1985 年全国联赛二试题)

分析 对平面上五点的凸包进行分类.

解 设已给五点A,B,C,D,E的凸包为M.

(1)M是凸五边形$ABCDE$. 因为凸五边形内角之和为 540°，所以至少有一内角$\geqslant$108°. 不妨设$\angle BAC\geqslant108°$，又设$\triangle ABC$中$\angle C\leqslant\angle B$，$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，则：

$$\angle C\leqslant90°-\frac{1}{2}\angle A,\ \sin C\leqslant\sin\left(90°-\frac{1}{2}A\right)=\cos\frac{1}{2}A.$$

由正弦定理，$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}\geqslant\frac{\sin A}{\cos\frac{1}{2}A}=2\sin\frac{1}{2}A\geqslant2\sin54°$，所以$\lambda\geqslant2\sin54°$.

(2)因为 M 为三角形或凸四边形，故这时必有一已知点，设为 E，在 $\triangle ABC$ 内部. 连结 EA，EB，EC，则在 $\angle AEB$，$\angle BEC$，$\angle CEA$ 中，至少有一个不小于 $120°$. 由(1)的证法可得 $\lambda\geqslant 2\sin 60°>2\sin 54°$，命题成立.

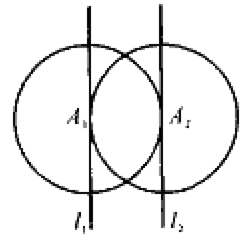
(3)M 为线段 AB，此时显然有 $\lambda\geqslant 2>2\sin 54°$.

由上面的证明可知，当且仅当已知点组成凸五边形 $ABCDE$ 的每个角都等于 $108°$，并且每条边均相等时，$\lambda=2\sin 54°$，即 $\lambda=2\sin 54°$ 的充要条件是已知点组成正五边形.

例 5 平面上 n(n 不为平方数)个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，设 $\lambda=\dfrac{\max\{A_iA_j\}}{\min\{A_iA_j\}}$.

求证：$\lambda\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}[\sqrt{n}]$.

证明 固定 $\max\{A_iA_j\}=d$. 设 $A_1A_2=d$，分别过 A_1，A_2 作半径为 d 的圆，再过 A_1，A_2 分别作切线 l_1，l_2，则 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 均在 l_1，l_2 之间. 再过每个点作垂直于 l_1，l_2 的直线，则存在 l_3，l_4 使所有点在 l_3，l_4 之间. 又 $A_iA_j\leqslant d$，所以 l_3，l_4 之间距离 $\leqslant d$，不妨设等于 d，则 l_1，l_2，l_3，l_4 交得正方形 $A_3A_4A_5A_6$，则所有点在正方形 $A_3A_4A_5A_6$ 内.



再以 $\dfrac{d}{[\sqrt{n}]}$ 为边长，将 $A_3A_4A_5A_6$ 划分为 $[\sqrt{n}]^2$ 个小正方形，

因为 n 不为平方数，所以 $n>[\sqrt{n}]^2$，

所以存在一个小正方形之内有两个点 A_i，A_j，

所以 $\min\{A_iA_j\}\leqslant\sqrt{2}\cdot\dfrac{d}{[\sqrt{n}]}$.

所以 $\lambda\geqslant\dfrac{d}{\sqrt{2}\cdot\dfrac{d}{[\sqrt{n}]}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}[\sqrt{n}]$，证毕.

例 6 在一个平面上有 100 个点，其中任意三点均不共线，我们考虑以这些点为顶点的所有可能的三角形. 证明：其中至多有 70%的三角形是锐角三角形.

(第 12 届国际数学奥林匹克题)

分析 证明一个引理：任意五个点，其中没有三点共线，则一定可以找到以它们为顶点的三个非锐角三角形.

证明 任意五个点，其中没有三点共线，则一定可以找到以它们为顶点的三个非锐角三角形. 这个结论可分三种情形讨论.

(1)若五个点组成一个凸五边形，则这个五边形中至少有两个内角为钝角，它们可能相邻(例如 $\angle A$，$\angle B$)，也可能不相邻(例如 $\angle A$，$\angle C$)(如图 a，图 b). 再注意四边形 $ACDE$ 中至少有一个内角为非锐角，这样就找到了三个不同的非锐角，相应地得到三个非锐角

三角形.

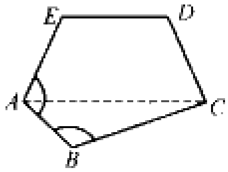


图 a

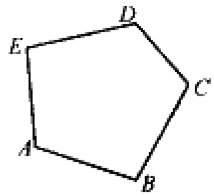


图 b

(2)若五个点中有四个点组成一个凸四边形 $ABCD$(图 c),另一点 E 在四边形 $ABCD$ 内部,则 EA,EB,EC,ED 相互间的夹角至少有两个为钝角,再加上四边形 $ABCD$ 中的非锐内角,至少可找到三个非锐角三角形.

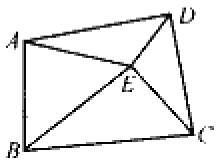


图 c

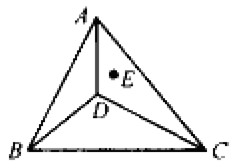


图 d

(3)若五个点中有三点组成一个$\triangle ABC$(图 d),另外两点 D 和 E 均在$\triangle ABC$ 内,由于$\angle ADB$、$\angle BDC$、$\angle CDA$ 中至少有两个钝角,我们可以找到四个钝角三角形.

综合(1)、(2)、(3)可得结论.

由于每个非锐角三角形至多属于 C_{100-3}^{2} 个五点组,而五点组共有 C_{100}^{5} 个.所以 100 个点组成的非锐角三角形至少有$\frac{3\times C_{100}^{5}}{C_{97}^{2}}$个,它与三角形总数的比

$$\frac{3C_{100}^{5}}{C_{97}^{2}C_{100}^{3}}=\frac{3\times\dfrac{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96}{120}}{\dfrac{97\cdot 96}{2}\times\dfrac{100\cdot 99\cdot 98}{6}}=\frac{3}{10}.$$

因此,锐角三角形不多于三角形总数的 $1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}=70\%$.

例 7 设凸四边形 $ABCD$ 的面积为1,求证:在它的边上(包括顶点)或内部可以找出四个点,使得以其中任意三点为顶点所构成的四个三角形的面积均大于$\frac{1}{4}$.

(1991 年全国联赛二试题)

分析与解 如图 a,考虑四个三角形$\triangle ABC$,$\triangle BCD$,$\triangle CDA$,$\triangle DAB$ 的面积,不妨设 $S_{\triangle DAB}$ 为最小.分四种情况讨论:

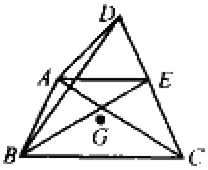


图 a

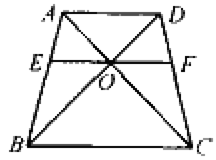


图 b

(1)$S_{\triangle DAB}>\frac{1}{4}$，则 A,B,C,D 即为所求的四点.

(2)$S_{\triangle DAB}<\frac{1}{4}$，设 G 为$\triangle BCD$ 的重心，因为 $S_{\triangle BCD}=1-S_{\triangle DAB}>\frac{3}{4}$，

故 $S_{\triangle GBC}=S_{\triangle GCD}=S_{\triangle GDB}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}>\frac{1}{4}$. 从而 B,C,D,G 四点即为所求.

(3)$S_{\triangle DAB}=\frac{1}{4}$，而其他三个三角形的面积均大于$\frac{1}{4}$.

由于 $S_{\triangle ABC}=1-S_{\triangle CDA}<\frac{3}{4}=S_{\triangle BCD}$，故可过 A 作 $AE\parallel BC$ 交线段 CD 于 E. 由于 $S_{\triangle ABC}>S_{\triangle DAB}$，故 $S_{\triangle EBA}>S_{\triangle DBA}=\frac{1}{4}$. 又 $S_{\triangle EAC}=S_{\triangle EAB}$，$S_{\triangle EBC}=S_{\triangle ABC}>\frac{1}{4}$，故 E,A,B,C 四点即为所求.

(4)$S_{\triangle DAB}=\frac{1}{4}$，而其他三个三角形中还有一个面积等于$\frac{1}{4}$，不妨设 $S_{\triangle CDA}=\frac{1}{4}$(如图 b). 此时 $AD\parallel BC$，过 AC,BD 的交点O 作 $EF\parallel BC$，分别交 AB,CD 于 E,F，则 $EF=2\times\frac{3}{4}AD=\frac{3}{2}AD$，$S_{\triangle EBF}=S_{\triangle ECF}=\frac{9}{8}S_{\triangle DAB}>\frac{1}{4}$.

$S_{\triangle EBC}=S_{\triangle FBC}>S_{\triangle EBF}>\frac{1}{4}$，故 E,B,C,F 四点即为所求.

例 8 设 M 是平面上的 n 个点组成的集合，满足：

(1)M 中存在 7 个点是一个凸七边形的 7 个顶点；

(2)对 M 中任意 5 个点，若这 5 个点是一个凸五边形的 5 个顶点，则此凸五边形内部至少含有 M 中的一个点. 求 n 的最小值. (2004 年中国数学冬令营)

分析 由题目已知条件，凸七边形中含有凸五边形，且凸五边形内至少有 M 中一点，构造出 11 个点的特例. 然后设法证明 $n\geqslant 11$.

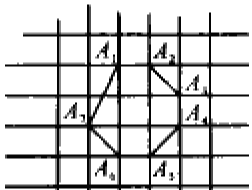
解 先证 $n\geqslant 11$.

设顶点在 M 中的一个凸七边形为 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$，连 A_1A_5. 由条件知，在凸五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 中至少有 M 中一个点，记为 P_1，连结 P_1A_1，P_1A_5，则在凸五边形 $A_1P_1A_5A_6A_7$ 内至少有 M 中一个点，记为 P_2，且 P_2 异于 P_1. 连结直线 P_1P_2，则 $A_1,A_2,\cdots,A_7$ 中至少有 5 个顶点不在直线 P_1P_2 上，由抽屉原理知，在直线 P_1P_2 的某一

侧必有 3 个顶点，在这 3 个顶点与点 P_1，P_2 构成的凸五边形内，至少含有 M 中的一个点 P_3.

再作直线 P_1P_3，P_2P_3，令直线 P_1P_2 对应区域 π_3：它是以直线 P_1P_2 为边界且在 $\triangle P_1P_2P_3$ 异侧的一个半平面（不含直线 P_1P_2），类似地定义区域 π_1，π_2. 这样，3 个区域 π_1，π_2，π_3 覆盖了平面上除 $\triangle P_1P_2P_3$ 外的所有点. 由抽屉原理知，7 个顶点 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6，A_7 中必有 $\left[\frac{7}{3}\right]+1=3$ 个顶点在同一区域（不妨设为 π_3）内，这 3 点与 P_1，P_2 构成一个顶点在 M 中的凸五边形，故其内部至少含 M 中一个点 P_4，所以 $n\geqslant 11$.

现在构造一个例子说明 $n=11$ 是可以的. 如图所示，凸七边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 为一个整点七边形，其内部有 4 个点，则条件(1)显然满足. 这个点集 M 也满足条件(2). 否则，假设存在一个整点凸五边形，其内部不含整点，则因整点多边形的面积均可表示为 $\frac{n}{2}$（$n\in \mathbf{N}^*$）的形式，由最小数原理，必有一个面积最小的内部不含整点的整点凸五边形 $ABCDE$. 考虑顶点坐标的奇偶性，从而五边形 $ABCDE$ 中必有两个顶点的坐标的奇偶性完全相同，于是它们连线的中点 P 仍为整点. 又 P 不在凸五边形 $ABCDE$ 内部，从而 P 在凸五边形的某条边上，不妨设 P 在 AB 边上，则 P 为 AB 的中点，连结 PE，则 $PBCDE$ 是面积更小的内部不含整点的整点凸五边形，矛盾！



故 $n_{\min}=11$.

例 9 5个点无三点共线，则 $\frac{S_{\max}}{S_{\min}}\geqslant\frac{\sqrt{5}+1}{2}$（其中 S 为任意三点组成的三角形的面积）.

分析与解 (1)凸包为三角形或四边形时，存在三角形，此时 $\frac{S_{\max}}{S_{\min}}\geqslant 3$ 成立.

(2)凸包为五边形时，设为 $A_1A_2A_3A_4A_5$，在 A_1A_3，A_1A_4 上分别取 P，Q，使 $\frac{A_1P}{PA_3}=\frac{A_1Q}{QA_4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则 $PQ /\!/ A_3A_4$，$\frac{A_1A_3}{PA_3}=\frac{A_1A_4}{QA_4}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

①若 A_2，A_5 中存在一点位于 PQ 与点 A_3，A_4 同侧，则 $\frac{S_{\max}}{S_{\min}}\geqslant\frac{A_1A_3}{PA_3}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

②若 A_2，A_5 均在 PQ 与 A_3A_4 异侧，设 A_2A_5 与 A_1A_3 交于 R，则

$$\frac{S_{\max}}{S_{\min}}\geqslant\frac{S_{A_2A_3A_5}}{S_{A_1A_2A_5}}=\frac{RA_3}{RA_1}\geqslant\frac{PA_3}{PA_1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

例 10 平面上有 4 条直线，其中任意 3 条不共点，每两条相交于一点，从而每条直线上有 3 个交点，在每条直线上截出 2 条线段，所得 8 条线段长能否为

(1)1，2，3，4，5，6，7，8；

(2)互不相等的整数.

解 (1)见图1,所得8条线段长为1,2,3,4,5,6,7,8.因为三角形中任意一边之长大于其余两边之差的绝对值,故在一个非等腰且边长为整数的三角形中,任何一边之长大于1,所以长为1的线段只能为AB或AF.不妨设$AF=1$,由$1=AF>|AC-CF|$,且AC,CF均为整数,所以$AC=CF$.在$\triangle ACF$中,由余弦定理得

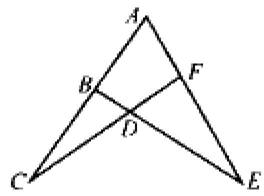


图1

$$\cos\angle C=\frac{AC^2+CF^2-AF^2}{2AC\cdot CF}=1-\frac{AF^2}{2AC\cdot CF}=1-\frac{1}{2AC\cdot CF},$$

在$\triangle BCD$中,由余弦定理得

$$\begin{aligned}BD^2&=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle C\\&=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\left(1-\frac{1}{AC\cdot CF}\right)\\&=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD+\frac{BC}{AC}\cdot\frac{DC}{FC},\end{aligned}$$

由于上式中$\frac{BC}{AC}\cdot\frac{DC}{FC}<1$,而其余各项均为整数,矛盾.

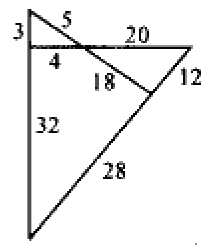


图2

故不存在满足条件的4条直线,使得截出的8条线段长分别为1,2,3,4,5,6,7,8.

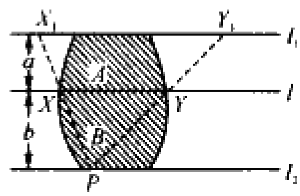
(2)见图2

由图2可知所截出的8条线段可以为互不相等的线段,图中这8条线段的长依次为3,4,5,12,16,20,28,32.

同步检测5

1.已知某个凸多边形,在其内不能置放面积为1的任何三角形.证明:这个多边形能置于面积为4的三角形内.

2.设G是紧夹在平行线l_1与l_2之间的任一凸区域(即其边界上任意两点之间所连线段都包含于它的区域),其边界c与l_1,l_2都有公共点.平行于l_1的直线l将G分为如图所示的A,B两部分,且l与l_1和l_2之间的距离分别为a和b.



(1)当G为怎样的图形时,A,B两部分的面积之比$\frac{S_A}{S_B}$达到最大值,并说明理由.

(2)试求$\frac{S_A}{S_B}$的最大值.　　(1989年四川省赛二试题)

3.在单位正方形内,有一个由一些线段组成的集合S,定义$d(s)$为S中线段的总长.若对于平面上任一与单位正方形有交点的直线必穿过S中的线段,求证:

(1)$\min\{d(s)\}\leqslant 1+\sqrt{3}$.

(2)$\min\{d(s)\}$可否比$1+\sqrt{3}$更小,若不能,请说明理由.

4.用任意的方式,给平面上的每一个点染上黑色或白色.求证:一定存在一个边长为1或$\sqrt{3}$的正三角形,它的三个顶点是同色的.　　(1986年全国冬令营赛题)

5.在平面上给定6个点,其中任何三点都不在一直线上.证明:在这6个给定的点中,可以挑出这样三个点,使得在这三个点构成的三角形中,有一个角不小于$120°$.

(1958年匈牙利数学奥林匹克竞赛题)

6.已知5条线段中任何三条都可以组成一个三角形.证明:这些三角形中至少有一个是锐角三角形.　　(1970年第4届全苏数学奥林匹克竞赛题)

7.一个三角形形状的纸片ABC和其上一点P,考虑将A、B、C折在点P上所形成的折痕,如果三条折痕互不相交,我们称P为$\triangle ABC$的一个折叠点.如果$AB=36$,$AC=72$,$\angle B=90°$,且由$\triangle ABC$折叠点所形成的集合面积具有$q\pi-r\sqrt{s}$的形式,其中q,r和s均为正整数,且没有平方因子.求$q+r+s$.　　(第12届美国数学邀请赛题)

8.将一些整数排在数轴的一切有理点上.求证:可找到这样一个区间,使这区间两个端点上的数之和不大于区间中点上的数的2倍.　　(第25届全俄数学奥林匹克竞赛题)

9.设整数$n\geqslant 4$,由平面上n个点$P_1,P_2,\cdots,P_n$所构成的集合S满足:任意三点不共线,任意四点不共圆.设$a_t(1\leqslant t\leqslant n)$表示包含$P_t$的圆$P_iP_jP_k$的数目,且$m(S)=a_1+a_2+\cdots+a_n$.证明:存在依赖于$n$的正整数$f(n)$,使得$S$中的点是凸$n$边形的顶点的充分必要条件是$m(S)=f(n)$.　　(第41届IMO预选题)

10.在平面上有n个彼此平行的矩形,矩形的不同边在不同的直线上.这些矩形的周界将平面分成若干个连通区域.若一个区域在其周界上至少有一个顶点是这n个矩形的顶点,则称这个区域是“好的”.证明:所有“好的”区域的顶点数目之和小于$40n$.

(第41届IMO预选题)

第6讲 覆盖

知识点金

覆盖问题

定义 1 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 是 n 张纸片，F 是一个平面点集，若存在一种放置这 n 张纸片的方法，使 F 中每一点都至少与某个 G_i 的点相重叠，则称这 n 张纸片 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 能覆盖点集.

定义 2 如果无论怎样放置这 n 张纸片 $G_1, G_2, \cdots, G_n$，都至少有 F 中的一个点不能与任一张纸片中的点相重叠，就称这 n 张纸片 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 不能覆盖图形.

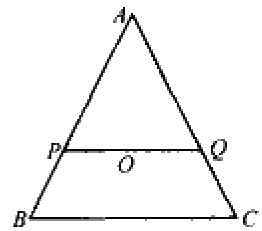
用圆或其他图形覆盖是覆盖中的一个基本问题，除此以外，用多个圆覆盖一个或几个图形，或用直线形覆盖一个或几个图形，也是常见的覆盖问题. 下面通过例题说明这几类问题的解法.

例题精析

例 1 已知等边△的边长为 l，长度为 d 的线段端点在三角形的边上滑动，求能使 d 覆盖整个三角形的最小长度.

分析 本题是求最值的问题，在覆盖问题中，如果能找到一个共同的量，然后再根据一些"运动过程"来确定最值，这是一个基本想法，在寻找共同量时，要注意对特殊点的处理.

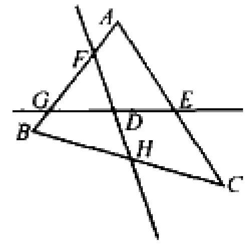
证明 不妨设△ABC 为等边△，且 O 为其中心，显然，因为线段 d 能覆盖整个三角形，则在某个时候，O 点一定在线段 PQ 上，这便是分析中的共同的量，显然 PQ 的最小值



是$\frac{2}{3}$. 下面证明$\frac{2}{3}$是可取的.

对$\triangle ABC$中的任一点P,过P作两条线,分别平行离P最近和最远的边,则前者不小于$\frac{2}{3}$,后者不大于$\frac{2}{3}$,因此,绕P转动,从第一条线到第二条线的过程中,必有一位置长度为$\frac{2}{3}$,得证.

例 2 $\triangle ABC$的三边被三个矩形R_1,R_2,R_3覆盖,且这三个矩形的边都平行于两个固定方向,则这个三角形被R_1,R_2,R_3覆盖.

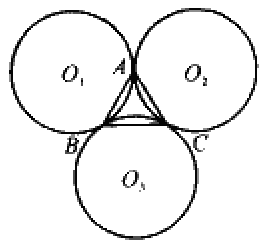


分析 可以转化为$\triangle ABC$内的任一点都可以在某个矩形内的证明.

证明 在$\triangle ABC$内任找一点D,作平行于两固定边的直线交三边于E,H,G,F. 依题意知,他们都位于某个矩形内. 由抽屉原理知,必有两点位于同一矩形内,不妨设为R_1. 若这两点是F,H(或E、G),则显然D也属于这个矩形,若这两点是E,H,那么ED,DH分别平行于两边,则易知D也在矩形内.

例 3 设三圆两两相切于点A,B,C,将每个圆的圆心不变,半径变为原半径的$\frac{2}{\sqrt{3}}$. 求证:$\triangle ABC$中的每一点至少被一个扩大的圆覆盖.

证明 设$\triangle ABC$内任一点P,在$\angle O_1PO_2$,$\angle O_2PO_3$,$\angle O_3PO_1$中至少有一个$\geqslant 120°$,不妨设$\angle O_1PO_2\geqslant 120°$. 则由余弦定理知



$$O_1O_2^2=PO_1^2+PO_2^2-2PO_1PO_2\cdot\cos\angle O_1PO_2$$
$$\geqslant PO_1^2+PO_2^2+PO_1\cdot PO_2$$
$$\geqslant\frac{3}{4}(PO_1+PO_2)^2,$$

所以$O_1O_2\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(PO_1+PO_2)$.

即$O_1P+PO_2\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}(O_1A+O_2A)$,

则$O_1P\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}O_1A$,$O_2O\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}O_2A$中至少有一个成立.

例 4 试证:面积为S,周长为p的四边形一定可以盖住一个半径为$\frac{S}{p}$的圆.

证明 本题等价于在四边形内存在一个到各边的距离大于等于$\frac{S}{p}$的点. 设为四边形

$ABCD$.

以 AB,BC,CD,DA 为长，以 $\frac{S}{p}$ 为宽向四边形 $ABCD$ 内侧作矩形，计算这些矩形的总面积，由 $AB+BC+CD+DA=p$，可得四个矩形总面积

$$=AB\cdot\frac{S}{p}+BC\cdot\frac{S}{p}+CD\cdot\frac{S}{p}+DA\cdot\frac{S}{p}$$

$$=(AB+BC+CD+DA)\cdot\frac{S}{p}$$

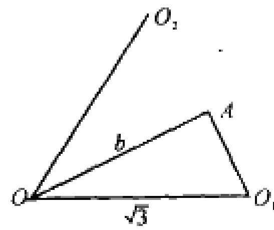
$$=p\cdot\frac{S}{p}=S.$$

又因为四个矩形有重叠部分，所以，四边形内必有一点 O 没有被四个矩形中的任何一个所覆盖，从而，O 点到四边距离均大于等于 $\frac{S}{p}$. 以此点为圆心，$\frac{S}{p}$ 为半径的圆一定被四边形 $ABCD$ 所覆盖.

例 5 有 n 个圆，每两个圆都有公共点，证明：可以用 7 颗图钉把它们全部钉住.

分析 原命题等价于证明，可以找到 7 个点，使得每个圆上或圆内至少含有 7 个点中的一个点. 考虑极端情形是数学解题中的常用方法，在处理覆盖问题时有重要的应用.

证明 设圆 O 是 n 个圆中半径最小的圆，不妨设它的半径为 1. 以 O 为圆心，作一个半径为 $\sqrt{3}$ 的圆，取其一个内接正六边形 $O_1O_2O_3O_4O_5O_6$，则只需证每个圆至少含有 $O,O_1,O_2,O_3,O_4,O_5,O_6$ 中的一点.



定义 $\odot(p,r)$，其中 p 为圆心，r 为半径. 则对任意一个已知圆 $\odot(A,a)$，因为它与 $\odot(O,1)$ 有交点，所以 AO 的距离 $b\leqslant a+1$.

如果 O 在 $\odot(A,a)$ 的内部，那么命题得证.

如果 O 在 $\odot(A,a)$ 的外部，则有 $b\geqslant a$. 不妨设 A 点在 $\angle O_1OO_2$ 的内部或边界上，且 $\angle AOO_1\leqslant 30^\circ$.

于是 $AO_1^2=b^2+3-2\sqrt{3}\cos\angle AOO_1\leqslant b_2+3-3b$.

因为 $a\geqslant 1$，所以 $a^2-3a+3=a^2+3(1-a)\leqslant a^2$，

$(a+1)^2-3(a+1)+3=a^2-(a-1)\leqslant a^2$.

因为 $a\leqslant b\leqslant a+1$，

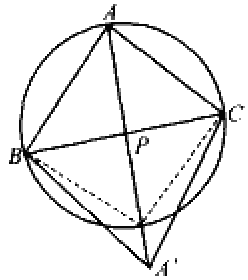
所以二次函数 $f(x)=x^2-3x+3$ 在 b 处的值

$b^2-3b+3\leqslant\max\{a^2-3a+3,(a+1)^2-3(a+1)+3\}\leqslant a^2$，

所以 $AO_1^2\leqslant a^2$，$AO_1\leqslant a$，即 O_1 在 $\odot(A,a)$ 内，从而命题得证.

例 6 对于凸 n 边形，存在相继的三个顶点，使过这三点的圆覆盖整个凸 n 边形.

证明 首先证明，在 n 点中任取三点作出的圆中，最大的圆覆盖凸 n 边形.



不妨设$\triangle ABC$的外接圆最大. 若存在 A'在$\odot ABC$外，不妨设 A，A'在 BC 异侧，因为 $ABA'C$ 为凸四边形，

所以边 AA'交$\odot ABC$于另一点 P，则 P，A'在 BC 同侧，

所以 P 在$\triangle A'BC$ 内，所以 $A'B+A'C>PB+PC$，

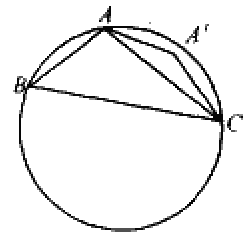
所以 $A'B>PB$ 与 $A'C>PC$ 至少有一个成立.

不妨设 $A'B>PB$，则由正弦定理

$R_{\odot BA'A}=\dfrac{BA'}{\sin\angle A'AB}>\dfrac{PB}{\sin\angle PAB}=R_{\odot ABC}$ 与 $\odot ABC$ 为最大圆矛盾.

下证最大圆过三个相继顶点.

同样设$\odot ABC$为最大圆，则$\angle ABC$，$\angle BCA$，$\angle CAB$ 中至少两个小于 $90°$，不妨设 $\angle ABC<90°$，$\angle BCA<90°$，



若 AC 间有顶点 A'，则由前面的证明 A'在$\odot ABC$内，

则$\angle AA'C+\angle ABC>180°$，$90°>\angle ABC>180°-\angle AA'C>0°$，

所以 $R_{\odot AA'C}=\dfrac{AC}{\sin(180°-\angle AA'C)}>\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=R_{\odot ABC}$，矛盾.

所以 A，C 为相继顶点，同理 A，B 为相继顶点，因此得证.

例 7 证明：若角 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n<\beta(<2\pi)$，则无法用这 n 个角完全覆盖角 β.

分析 结论的正确性是容易想象的，但要把问题讲清楚，就需要结合一定的图形的"量"作为"桥梁". 对于此题，可以发现"弧度"就是一个有用的量.

以 B 为圆心作圆，使点 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 均在圆内，对每个角$\angle A_i$，$\angle A_i$ 会截$\odot B$ 的一段弧，设弧度为 β_i，那么如果有 $\beta_i<\alpha_i$，则 $\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n<\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n<\beta$，

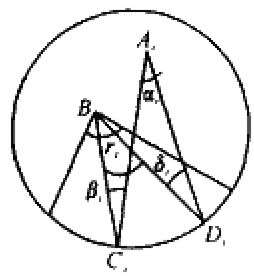


图 1

则角 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 盖住的总弧长小于角 B 所对的弧长，则角 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 无法覆盖角 B，命题就得证了.

但事实上，β_i 是不一定小于α_i 的（如图 1），但起码可以知道，如果使$\odot B$ 半径十分大，那么 α_i 与 β_i 的大小将很接近，所以可以总结出下面的证法.

证明 设 A_i 到 B 的距离为 t_i，作$\odot(B,r)$，并使 $r>\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}t_i$.

这样，A_1，A_2，$\cdots$，A_n 均在$\odot(B,r)$内，设角 A_i 与$\odot(B,r)$交于 C_i，D_i，可见，在图 1 与图 2 中，分别有 $\beta_i=\alpha_i+\delta_i-r_i$，$\beta_i=\alpha_i+r_i+\delta_i$，

所以 $\beta_i\leqslant\alpha_i+r_i+\delta_i(i=1,2,\cdots,n)$.

在$\triangle A_iC_iB$中，$\sin r_i=\frac{t_i}{r}\sin\angle BA_iC_i\leqslant\frac{t_i}{r}$.

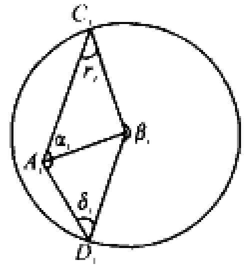


图 2

令$r\to+\infty$，因为t_i为一定值，所以$\min\limits_{r\to+\infty}\frac{t_i}{r}\to0$，

所以对于任意$\varepsilon>0$，存在r，使$\varepsilon=\sin\frac{1}{2n}(\beta-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_n)$，

因为$r_i<\frac{\pi}{2}$，所以$r_i<\frac{1}{2n}(\beta-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_n)$，

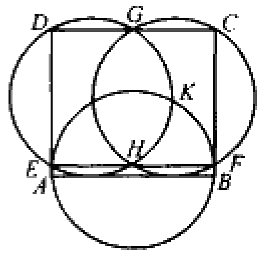
同理有$\delta_i<\frac{1}{2n}(\beta-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_n)$.

所以$\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i+\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_i+\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i<\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i+\beta-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=\beta$.

所以$\angle A_1,\angle A_2,\cdots,\angle A_n$不能覆盖$\angle B$，证毕.

例 8 如果边长为1的正方形可被直径都为a的三个圆形纸片覆盖，求a的最小值.

解 设四边形$ABCD$是边长为1的正方形，E,F分别在AD和BC上，且$DE=CF=\frac{7}{8}$. 又G,H分别是CD,EF的中点，连结GH，于是$DH=CH=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{65}}{8}$.



$AF=\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{65}}{8}$.

以DH,CH,AF为直径的圆覆盖了正方形$ABCD$，于是，正方形可被3个直径都为$\frac{\sqrt{65}}{8}$的圆形纸片所覆盖，故所求a的最小值为$\frac{\sqrt{65}}{8}$.

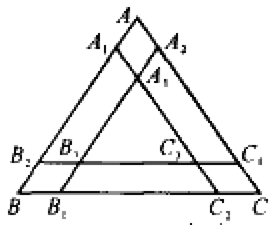
如果正方形$ABCD$能被3个半径都为$b\left(b<\frac{\sqrt{65}}{8}\right)$的圆形纸片$M_1,M_2,M_3$覆盖，那么，由抽屉原理知，$A,B,C,D$中必有2个点被同一个圆形纸片所覆盖. 如图，由于$EB=\frac{\sqrt{65}}{8}>b$，故$E$不能被$M_1$($A,B$被$M_1$覆盖)覆盖，不妨设$E$被$M_2$覆盖，由于$GE=\frac{\sqrt{65}}{8}>b$，且$GB>GF=\frac{\sqrt{65}}{8}>b$，所以$G$不能被$M_1$或$M_2$覆盖，而只能被$M_3$覆盖. 而$FA=FG=\frac{\sqrt{65}}{8}>b$，故$F$不能被$M_1,M_3$覆盖，而只能被$M_2$覆盖. 在$FC$上取$K$，使$FK=\frac{1}{8}$，则$KA>KE=\frac{\sqrt{65}}{8}>b$，故$K$不能被$M_1,M_2$覆盖，而只能被$M_3$覆盖，因$DB>DF>DK$

$>\frac{\sqrt{65}}{8}>b$，并且 B,F,K 分别在 M_1,M_2,M_3 内，故 D 不能被 M_1,M_2,M_3 中任一个所覆盖，矛盾！所以四边形 $ABCD$ 不能被直径小于$\frac{\sqrt{65}}{8}$的 3 个等圆覆盖.

综上，所求 a 的最小值为$\frac{\sqrt{65}}{8}$.

例 9 在一个面积为1的正三角形内部，任意取 5 个点. 证明：在此正三角形内，一定可以作 3 个正三角形盖住这 5 个点，这 3 个正三角形的面积之和不超过 0.64，且 3 个正三角形的各边平行于原三角形的边.

分析 由于$\frac{0.64}{1}=(0.8)^2$，所以可以在各边均取 2 个五等分点，这样得到 3 个面积为 0.64，且各边平行于原三角形边的三角形. 然后再对 5 个点的位置分类论证，便可得出答案.

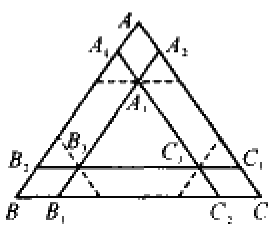


证明 在$\triangle ABC$ 三边上分别取点 A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2，使 $AA_1=AA_2=BB_1=BB_2=CC_1=CC_2=\frac{1}{5}AB$.

则$\triangle AB_2C_1$，$\triangle BC_2A_1$，$\triangle CA_2B_1$ 都是各边平行于$\triangle ABC$ 各边，且面积均为 0.64 的三角形.

(1)若$\triangle A_3B_3C_3$ 内有 2 个或 2 个以上的点，则$\triangle AB_2C_1$，$\triangle BC_2A_1$、$\triangle CA_2B_1$ 中有一个至少覆盖了 5 个点中的 3 个，剩下的每个点均可用一个面积极小的正三角形覆盖，此时命题显然成立.

(2)若$\triangle A_3B_3C_3$ 内有 1 个点，当梯形 $A_1A_3B_3B_2$，$A_2A_3C_3C_1$，$B_1B_3C_3C_2$ 中存在至少一个点时，不妨设梯形 $A_1A_3B_3B_2$ 中有一点. 则若梯形 $AA_1C_3C_1$ 或 $BB_2C_3C_2$ 中有点时，由(1)知命题成立. 否则，梯形 $CC_1C_3C_2$ 中有 3 个点，此时命题显然成立. 当梯形 $A_1A_3B_3B_2$，$A_2A_3C_3C_1$，$B_1B_3C_3C_2$ 均设有点时，则其余 4 点在梯形 $AA_1A_3A_2$，$BB_1B_3B_2$，$CC_1C_3C_2$ 内. 不妨设梯形 $AA_1A_3A_2$ 中至少有 2 个点，则$\triangle AB_2C_1$ 至少覆盖住了 3 个点，由(1)知命题亦成立.



(3)若$\triangle A_3B_3C_3$ 中没有点. 当梯形 $A_1A_3B_2B_3$，$A_2A_3C_1C_3$，$B_1B_3C_2C_3$ 中均无点时，过 A_3,B_3,C_3 分别作 BC、AC、AB 边的平行线，即得到 3 个面积为 0.16 的正三角形，它们盖住了 5 个点，故命题成立.

当梯形 $A_1A_3B_3B_2$，$A_2A_3C_3C_1$，$B_1B_3C_3C_2$ 中有一点时，不妨设该点在梯形 $B_1B_3C_3C_2$ 内，且该点离 A,B,C 三点中的 B 点最近，过该点作 AC 的平行线，则得到一个面积不超过 0.25 的正三角形覆盖住了该点和梯形 $BB_1B_3B_2$ 中的点，剩下在

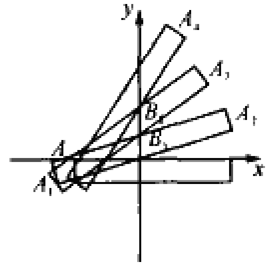
梯形 $AA_1A_3A_2$ 和 $CC_1C_3C_2$ 中的点，按上述方法构造即可. 此时，命题亦成立.

当梯形 $A_1A_3B_3B_2$，$A_2A_3C_3C_1$，$B_1B_3C_3C_1$ 中有 2 点或 2 个以上点时，必存在 $\triangle AB_2C_1$、$\triangle BA_1C_2$、$\triangle CB_1A_2$ 中的一个至少盖住了 3 个点，则按(1)的方法知命题成立.

综上，命题成立.

例 10 平面内给定若干条宽带，他们的长度和为 16，求证：可以将他们平行移动，使它们能够覆盖一个给定的半径为 1 的圆.

分析与证明 若其中有平行宽带，则可以将他们看为一条宽带.



若每两条不平行，则每一条宽带有一个斜率，将实数集分为 4 个区间：$(-\infty,-1]$，$(-1,0]$，$(0,1]$，$(1,+\infty)$. 则斜率在某个区间内的宽带总和可以不小于 4，不妨设为 $(0,1]$，并设这些宽带为 A_1，A_2，…，A_n. 不妨设 A_1 在 x 轴上.

设 A_2 的下端过原点，上端与 y 轴交于 B_1，再将 A_3 平行移至交 y 轴时下端的交点与 B_1 重合，设 A_3 的上端交于 y 轴交于 B_2，然后将 A_4 平行移至交 y 轴时的下端交点与 B_2 重合，依此类推，设 A_n 的上端交 y 轴于 B_{n-1}，并设 A_0 的上端交 x 轴于 A，则易知 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 覆盖了 $\triangle AOB_{n-1}$.

又因为 $\angle B_{n-1}AO\leqslant 45°$，所以 $B_{n-1}O\leqslant AO$，

又因为 $B_{n-1}O\geqslant 4$，则必须在 x 轴，y 轴上分别找点 B_0'，A_0'，使得 $A_0'O=B_0'O$，且 $\triangle AOB_{n-1}$ 将 $\triangle A_0'O'B_0'$ 覆盖，在等腰直角三角形 $A_0'O'B_0'$ 中，内切圆半径 $=\dfrac{4+4-4\sqrt{2}}{2}=4-2\sqrt{2}>1$.

所以命题得证.

例 11 对于任何自然数 k，我们将尺寸为 $1\times k$ 的矩形都称为“长条”. 试问，对于怎样的自然数 n，可将尺寸为 $1995\times n$ 的矩形分为两两不同的“长条”？

（第 58 届莫斯科数学奥林匹克竞赛题）

分析 利用对面积算两次，估计出 n 的范围.

解 显然，“长条”的边应平行于所给矩形的边. 不妨假定矩形的边长以厘米为单位. 分以下两种情况讨论：

(ⅰ) $n<1995$. 此时所能分出的最大“长条”的长度等于 1995cm; 但因用大小不同的“长条”所能覆盖的面积不超过 $1+2+\cdots+1995=\dfrac{1}{2}\times 1995\times 1996(\text{cm}^2)$，

而所给矩形的面积为 $1995n\ \text{cm}^2$，由此知

$\dfrac{1}{2}\times 1995\times 1996\geqslant 1995n$，即 $n\leqslant\dfrac{1}{2}\times 1996=998$.

对于 $n\leqslant 998$，可以给出适当的将 $1995\times n$ 的矩形分为两两不同的“长条”的分法. 例

如，先将 $1995\times n$ 的矩形分成 n 条长度均为 1995 的"长条"，留下其中一条，将第二条分成长度分别为 1 与 1994 的两条，将第三条分成长度分别为 2 与 1993 的两条，如此等等.

(ⅱ) $n\geqslant 1995$. 此时所能分出的最大"长条"的长度等于 n cm. 由于长度不超过 n 的大小不同的"长条"所能覆盖的面积不超过

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1),$$

所以 $\frac{1}{2}n(n+1)\geqslant 1995n$.

故 $n\geqslant 3991$.

可以类似地给出此种情况下的分法.

综上所述，知 $n\leqslant 998$ 或 $n\geqslant 3991$.

同步检测 6

1. 证明：直径为 1 的点集 M，能被边长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的正六边形覆盖.

2. 由 2×2 方格纸去掉一个方格所余下的图形称为拐形，用这种拐形去覆盖 5×7 的方格板，每个拐形恰覆盖 3 个方格，可以重叠但不能超出方格板的边界，问能否使方格板上每个方格被覆盖的层数都相同？说明理由.

3. 一个边长为 50 的正方形内有一条折线，对正方形内任一点都能在折线上找到这样的点，使它们之间的距离不大于 1，证明：折线的长度大于 1248.

4. 用 5 个同等大的正三角形可以覆盖正三角形 ABC，求证：用 4 个即可以覆盖 $\triangle ABC$.

5. 证明：在边长为 1 的正方形内，不可能无重叠地放入两个边长大于 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 的正三角形.

6. 已知凸形 M，证明：能用一个面积 $\leqslant 2M$ 的矩形覆盖.

7. 若直线上有 n 条线段，任意两条都相交，证明：这 n 条线有公共点.

8. 在 $n\times n$ 的棋盘中，任 k 行和任 l 列的公共部分称为它的"子片"，并称 $k+l$ 为它的半周长. 假如若干个半周长不小于 n 的"子片"共同覆盖了棋盘的整条主对角线，证明：这些"子片"覆盖的方格数不少于棋盘总方格数的一半.

9. 在边长为 1 的正方形内有许多直径为 0.001 的圆，任意两个圆的圆心距离不小于 0.002. 证明：被这些圆所覆盖的面积小于 0.34.

10. 同一圆周上有 n 条两两相交的圆弧，证明：它们或有公共点，或覆盖整个圆周.

11. 记闭区间 $[0,1]$ 中一单调连续函数为 $f(x)$，且 $f(0)=0, f(1)=1$.

证明：f 的图像能被 n 个面积为 $\frac{1}{n^2}$ 的矩形所覆盖.

12. 边长为 1 的正三角形被 6 个半径为 r 的圆覆盖. 证明：$r \geqslant \frac{\sqrt{3}}{10}$.

（1999 年保加利亚数学竞赛题）

13. 以已知四边形的四条边为直径在四边形内部分别作四个半圆. 求证：

(1) 四边形内任何一点至少被一个半圆所覆盖；

(2) 四边形内最多只有一个点同时被四个半圆所覆盖.

14. 平面上有 n 个点，其中任意三点能被一个半径为 1 的圆覆盖，但总有三点不能被任何半径小于 1 的圆覆盖. 求可以覆盖所有这 n 个点的最小圆的半径.

第7讲 平面凸集、凸包及应用

知识点金

一、凸图形

什么是凸图形呢？如果 A,B 是一个图形上的任意两点，线段 AB 上的每一个点都在这个图形内，那么这个图形就叫做凸图形. 当然，若在图形内有两点 A,B,线段 AB 上有些点不在这个图形内，这个图形就不是凸图形，如五角星就不是凸图形. 显然，直线、射线、线段、三角形、平行四边形、凸多边形、圆等等，都是凸图形.

在覆盖问题中，最常用的凸图形是圆，下面我们证明圆是一个凸图形.

这相当于证明：若 A,B 在圆 O 内，则线段 AB 上的任何一点 P 都在圆 O 内.

连 OA,OB,OP,并设圆 O 的半径为 r,只需证明 $OP\leqslant r$.

若 $OA\geqslant OB$,则 $OP\leqslant OA\leqslant r$;

若 $OA\leqslant OB$,则 $OP\leqslant OA\leqslant r$.

于是 P 在圆 O 内，所以圆是一个凸图形.

二、凸包

对于每个点集 M,都有包含它的凸图形（至少全平面包含它），所有包含 M 的凸图形的交集仍然是凸图形，并且是包含 M 的最小凸图形.

定义1 包含点集（图形）M 的最小凸图形称为点集（图形）M 的凸包.

对于有限点组 M,当 M 中的点共一直线时，M 的凸包是一条线段；当 M 中的点是不全共线的点组时，可按下面定理作出 M 的凸包.

定理 有限点组的凸包存在且唯一.

证明 (1)存在性

作直线 l 使有限 n 点组 M 的点均在 l 的同一侧；平移 l 向 M 靠近，使 l 遇到 M 中的

点为止，此时 l 的位置为 l_1. l_1 上至少有 M 中一个点，也可能有 k 个点($1\leqslant k\leqslant n-1$). 设这 k 个点所在线段的左端点为 A_0，右端点为 A_1. 以 A_1 为旋转中心，逆时针旋转 l_1，直至其遇到 M 中的点为止，此时 l_1 变到新位置 l_2. l_2 上 M 中的点所在线段的右端点为 A_2. 依此继续下去，最后以 A_k 为旋转中心，逆时针旋转 l_k，直至其遇到 M 中的点为止，这时 l_k 变到 l_{k+1} 的位置. 而 l_{k+1} 恰遇 A_0，这时，我们就作出了有限点组 M 的凸包 $\overline{M}$.

(2)唯一性. 设 M 有两个不同的凸包 M_1 与 M_2，则 $M_1\cap M_2$ 是包含 M 的更小的凸图形，与包含定义相矛盾. 所以有限 n 点组的凸包是唯一的.

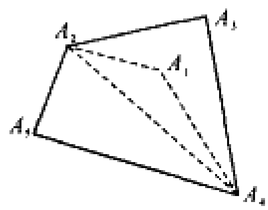
显然，有限 n 点组的凸包至多是以这 n 个点为顶点的凸 n 边形.

定义 2 平面图形 M 的点位于直线 l 的一侧且与 l 有公共点，则称 l 为图形 M 的支撑直线.

例题精析

例 1 平面上给定 $4n+1$ 个点，任意三点不共线，证明：可以用其中的 $4n$ 个点组成 $2n$ 对，连结每对点的 $2n$ 条线段至少有 n 个不同交点.

分析 先考虑 5 点的情形，再归纳证明.

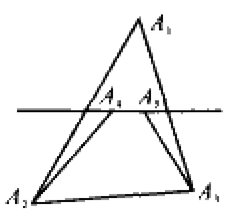


证明 我们先考虑 $n=1$ 的情况，考虑这 5 点的凸包.

(1)若凸包为五边形，则显然存在凸四边形.

(2)若凸包为四边形，设 A_1 在四边形 $A_2A_3A_4A_5$ 中，不妨设 A_1 在 $\triangle A_2A_3A_4$ 中，则 $A_1A_2A_5A_4$ 为凸四边形，成立.

(3)若凸包为三角形，设 A_4A_5 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 中，A_4A_5 必与 $\triangle A_1A_2A_3$ 两边相交，不妨设与 A_1A_2、A_1A_3 相交，则 $A_2A_3A_4A_5$ 为凸四边形，成立. 综上知原命题成立.



由上知必有一凸四边形，则其对角线相交于一点，命题成立.

对一般情况，我们用归纳法，先取出 5 个点，由上知，其中有两对点的连线有交点，去掉这两对点还剩下 $4(n-1)+1$ 个点. 由归纳假设(设对小于 n 时均成立)又可以得到 $n-1$ 个点，现在困难在于如何保证这 $n-1$ 个点与上面的那个点不同. 为了克服困难，我们对开始所取的 5 个点加以限制，$4n+1$ 个点是有限个点，有限个点的连线是有限条，因此存在一条直线 l，它与给定的点中任两点的连线都不平行，将 l 平行移动，使最初给定点在 l 的同一侧，再经过平移使 l 另一侧的点数由 0 增至 5. 我们开始就选这 5 个点，设这 5 个点中两对点所产生的线段交于点 M，剩下 1 个点与其余 $4(n-1)$ 个点，根据归纳假设，它们可产生 $n-1$ 个交点，而这 $n-1$ 个交点(是不同

的)与 M 关于 l 异侧，从而我们得到了 n 个不同的交点.

例 2 $P_1, P_2, \cdots, P_n (n \geqslant 9)$ 是平面上 n 个已知点，两两连接有 C_n^2 条线段 $P_iP_j (1 \leqslant i < j \leqslant n)$，这些线段长度的最小值记为 r_0，令 $g(r)$ 表示线段条数. 证明：

(1) $g(r_0) \leqslant 3n-6$；　　(2) $g(r) < n^{\frac{3}{2}}$.

分析与解 (1)对 n 用数学归纳法. 当 $n=3$ 时，显然有 $g(r_0) \leqslant 3 = 3n-6$，结论成立.

假设 $n=k$ 时成立，现考虑 $k+1$ 个点. 设它的凸包的一个顶点为 P_{k+1}，则 P_{k+1} 至多引出 3 条长为 r_0 的线段. 去掉 P_{k+1} 后，剩下的 k 个点，至多有 $3k-6$ 条长为 r_0 的线段(归纳假设)，所以这 $k+1$ 个点所成的线段中，长为 r_0 的线段条数 $g(r_0) \leqslant 3k-6+3 = 3(k+1)-6$. 于是命题对 $n \geqslant 3$ 的自然数成立.

(2)设在以 $P_i (i=1,2,\cdots,n)$ 为圆心，r 为半径的圆上有 k_i 个已知点，则

$$2g(r) = \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

因这 n 个点共有 C_n^2 条线段，其中为所作圆的半径及弦的至少有 $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i + \sum\limits_{i=1}^{n} C_{k_i}^2 - C_n^2$ 条(其中公共弦至多 C_n^2 条)，因此 $C_n^2 \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} k_i + \sum\limits_{i=1}^{n} C_{k_i}^2 + C_n^2$，即 $2C_n^2 \geqslant \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} k_i(k_i+1) > \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} k_i^2$. 利用柯西不等式得 $n(n-1) > \frac{1}{2n}(\sum\limits_{i=1}^{n} k_i)^2$，即 $n^2(n-1) > 2g^2(r)$，故 $g(r) < n^{\frac{3}{2}}$.

例 3 平面上给出 n 个点($n>4$)，其中无三点共线. 证明：至少可以找到 C_{n-3}^2 个以这些点为顶点的凸四边形.

分析与解 引理：平面上任意给定五个点，其中无三点共线，则这些点中有四个点是凸四边形的顶点.

设这五个点为 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5，考虑它们的凸包. 若凸包为凸四边形或凸五边形，则结论成立；若凸包为一个三角形，可设为 $\triangle A_1A_2A_3$，则 A_4, A_5 在其内部，连结 A_4, A_5 的直线恰与 $\triangle A_1A_2A_3$ 的两条边相交，不妨设与 A_1A_2, A_1A_3 相交，则 A_2, A_3, A_4, A_5 为凸四边形的顶点，故引理得证.

由引理知，n 个点中任 5 个点有一个凸四边形，而对于 1 个凸四边形它至多在 $n-4$ 个五点组中，故凸四边形数目 $\geqslant C_n^5 \times \frac{1}{n-4} \geqslant C_{n-3}^2$(事实上，当这 n 个点的凸包为三角形时恰有 C_{n-3}^2 个).

例 4 S 为平面内 $n (n \geqslant 3)$ 个点组成的点集，其中任三点不共线，若平面内存在一个含 m 个点的点集 P，使以 S 中任意 3 点为顶点的三角形内至少有 P 中一点，求 $m_{\min}$.

分析与解 $n=3$ 时，$m=1$；

$n=4$ 时，$m=3$；

$n=5$ 时，$m=5$.



首先设 n 个点集 C 的凸包为$\triangle A_1A_2A_3$. $\triangle A_1A_2A_3$ 内有 $n-3$ 个点，那么将这 n 个点中的一些点对连线，可将$\triangle A_1A_2A_3$ 划分为 $a_n=2n-5$ 个小三角形(所有线段除端点外没有其他公共点).

事实上，当 $n=3$ 时，只有一个三角形，即$\triangle A_1A_2A_3$，所以 $a_3=1=2\times3-5$.结论成立.

假设当 $n=k$ 时，结论成立.

那么当 $n=k+1$ 时，在上述 k 个点的基础上增加一个点 P，则 P 必在某个三角形内(凸包为三角形，且被完全划分). 将 P 与这个三角形的三个顶点连线，则将$\triangle A_1A_2A_3$ 划分为若干个三角形，增加的三角形个数为 2.

所以 $a_{k+1}=a_k+2=2k-5+2=2(k+1)-5$，结论成立.

因为每个三角形内至少含 P 中一点，

所以 $2n-5$ 个三角形内至少含有 P 中 $2n-5$ 个点，

所以 $m\geqslant2n-5$.

其次，设 S 是平面上 n 个点的集合，其中任三点不共线，这 n 个点中每两点连一条直线共有 C_n^2 条，故平面内存在一条直线 l 与这 C_n^2 条直线均不垂直. 以 l 为 x 轴，任意垂直于 l 的一条直线为 y 轴建立直角坐标系，于是 S 中 n 个点的横坐标两两不同，不妨设 S 中 n 个点的坐标为 $A_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$. $x_1<x_2<\cdots<x_n$，考虑任意$\triangle A_iA_jA_k(1\leqslant i<j<k\leqslant n)$，记 d_{jik} 为 A_j 到 A_iA_k 的距离$(1\leqslant i<j<k\leqslant n)$，而所有这些距离只有有限个，其中最小距离 $d>0$，作点 $B_j\left(x_j,y_j+\frac{1}{2}d\right)$，$B_j'\left(x_j,y_j-\frac{1}{2}d\right)(2\leqslant j\leqslant n-1)$. 这样 B_j，B_j'共有 $2(n-2)=2n-4$ 个.

对 S 中任意 3 点 $A_i,A_j,A_k(1\leqslant i<j<k\leqslant n)$.

当 A_j 在直线 A_iA_k 上方时，B_j'在$\triangle A_iA_jA_k$ 内.

于是这 $2n-4$ 个点满足需求.

下面证明这 $2n-4$ 个点中至少还有一个点可以去掉，仍满足条件.

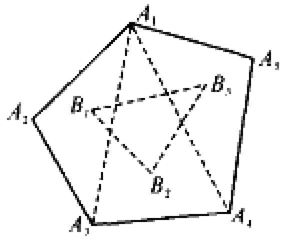
事实上，由于 S 内点的凸包为凸多边形，取凸包的三个顶点 $A_i,A_j,A_k(1\leqslant i<j<k\leqslant n)$. 则当 A_j 在直线 A_iA_k 上方时，$B_j\left(x_j,y_j+\frac{d}{2}\right)$在凸包外，当 A_j 在直线 A_iA_k 下方时，$B_j'\left(x_j,y_j-\frac{d}{2}\right)$在凸包外，可将它去掉，故剩下 $2n-5$ 个点组成点集 P，使 S 中任三点为

顶点的三角形内至少有一个 P 中的点. 所以 $m_{\min}=2n-5$.

例 5 确定平面上是否存在满足下列条件的两两不相交的无限点集 A,B.

(1)存在 $A\cup B$ 中任三点不共线,任二点距离 $\geqslant 1$.

(2)任何一个顶点在 B 中的三角形其内部必有一个 A 中的点,任何一个顶点在 A 中的三角形其内部必有一个 B 中的点.



分析与解 是不存在的.

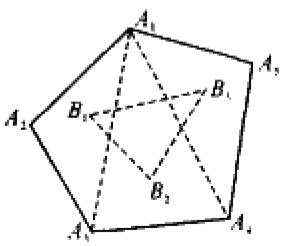
首先对于无限点集难以展开分析,将其变成有限点集. 对一无限点集,我们取其中一个 n 个顶点的凸包,凸包中必还有其他点,以每个点为圆心,$\frac{1}{2}$ 为半径作圆,可知,凸包中的点是有限个. 下面证明:可以找一个凸包,其内部与边界上恰有 9 个点. 设一个凸包内有 k 个点(包括边界),若 $k=9$,则成立,若 $k>9$,对其进行操作考察,其中连续三顶点 A_1,A_2,A_3. 若 $\triangle A_1A_2A_3$ 中无点,则取 A_i 中除去 A_2 的其他点所形成凸包,点数减少 1,若 $\triangle A_1A_2A_3$ 中有点,必存在 M 点,使凹四边形 $A_2A_1MA_3$ 中无点,取 A_i 中除去 A_2 再加上 M 的点为凸包顶点,点数减少 1.

故可经过有限次操作使凸包内和边界上共 9 个点,这里不妨设 9 个点中 A 中点多于 B 中点,进行讨论:

(1)若 5 个在 A 集中,4 个在 B 集中的点,考虑 5 个 A 集点所形成的凸包.

ⅰ)若为五边形,记为五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$.

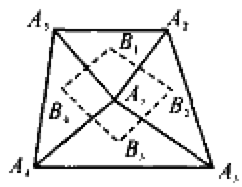
$\triangle A_1A_2A_3$,$\triangle A_1A_3A_4$,$\triangle A_1A_4A_5$ 中各有一 B 中的点.



记为 B_1,B_2,B_3,而 $\triangle B_1B_2B_3$ 中有一 A 中点,这与仅有 5 个 A 中的点矛盾.

ⅱ)若为四边形,记 A_1 在四边形 $A_2A_3A_4A_5$ 中.

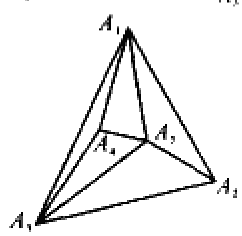
$\triangle A_1A_2A_5$,$\triangle A_1A_2A_3$,$\triangle A_1A_3A_4$,$\triangle A_1A_4A_5$ 中各有一 B 中点记为 B_1,B_2,B_3,B_4.



A_1 不可能同时在 $\triangle B_1B_2B_4$,$\triangle B_2B_3B_4$ 中,同理可知矛盾.

ⅲ)若为三角形,设 A_4,A_5 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 中,$\triangle A_1A_3A_4$,$\triangle A_1A_4A_5$,$\triangle A_1A_2A_5$,$\triangle A_4A_3A_5$,$\triangle A_2A_3A_5$ 中各有一 B 中点 >4 个,矛盾.

(2)若 A 中的点大于等于 6 个,B 中的点小于等于 3 个.

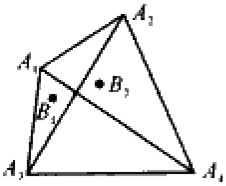


讨论凸包,由(1)知凸包为 n 边形,$n\geqslant 4$ 均矛盾.

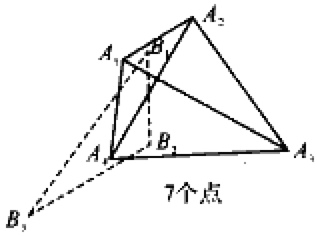
当 $n=3$ 时,所形成"A 集△"多于 4 个,矛盾.

故综上所述,满足题意的 A,B 是不存在的.

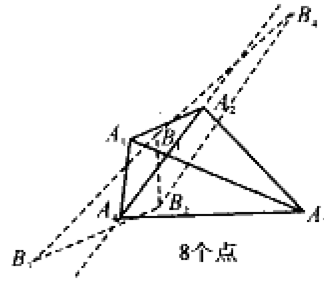
(注:本题为什么讨论 9 个点? 因为对于此种证明方法,6～8 个点都难以完成证明,例如下面的构造,就无法实现证明.)



6个点



7个点



8个点

例 6 平面内给定 n 个点，每两点间有一个距离，其中最长距离与最短距离之比为 λ_n，这 n 个点形成的凸包为凸 k 边形. 证明：$\lambda_n \geqslant 2\sin\frac{kn-4k+4}{2k(n-2)}\pi(n\geqslant 5)$.

引理 $\triangle ABC$ 中有一个内角不超过 $\frac{\pi}{n}(n\geqslant 5)$，则 $\triangle ABC$ 的最长边与最小边之比不小于 $2\cos\frac{\pi}{n}$.

证明 不妨设 $\angle C\leqslant\angle B\leqslant\angle A$，于是 $\angle C\leqslant\frac{\pi}{n}$，$\angle A=\pi-(\angle B+\angle C)\leqslant\pi-2\angle C$，

$\pi-\angle A\geqslant 2\angle C$， ①

又 $2\angle A\geqslant\angle A+\angle B=\pi-\angle C$，

$\angle A\geqslant\frac{1}{2}(\pi-\angle C)\geqslant\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{n}\right)=\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\geqslant 2\cdot\frac{\pi}{n}(n\geqslant 5)$.

即 $\angle A\geqslant 2\angle C$. ②

当 $\angle A\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，由②得 $\sin A\geqslant\sin 2C$.

当 $\angle A>\frac{\pi}{2}$ 时，则①得 $\sin A=\sin(\pi-\angle A)\geqslant\sin 2\angle C$.

故总有 $\sin A\geqslant\sin 2C$. 于是 $\lambda=\frac{BC}{AB}=\frac{\sin\angle A}{\sin\angle C}\geqslant\frac{\sin 2\angle C}{\sin\angle C}=2\cos\angle C\geqslant 2\cos\frac{\pi}{n}$，证毕.

回到原题，若这 n 个点中有三点共线，$\lambda_n\geqslant 2>2\sin\frac{kn-4k+4}{2k(n-2)}\pi$.

对于这 n 个点，若无三点共线，这 n 个点形成凸包为凸 k 边形.

内角和为 $(k-2)\pi$，故必存在一个内角使 $\angle A_iA_jA_k\leqslant\frac{(k-2)}{k}\pi$.

将凸包中的其他点与 A_j 连线，把 $\angle A_iA_jA_k$ 分成 $(n-2)$ 个小角.

故必存在 $\angle A_i'A_j'A_k'\leqslant\frac{(k-2)}{k(n-2)}\pi\leqslant\frac{\pi}{k}(n\geqslant k)$.

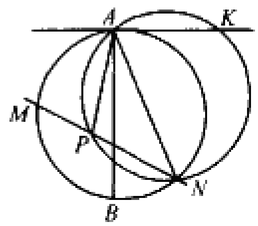
由引理知对于 $\triangle A_i'A_j'A_k'$，

$$\frac{l_{\max}}{l_{\min}}=2\cos\frac{k-2}{k(n-2)}\pi$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k-2}{k(n-2)}\pi\right)=2\sin\frac{kn-4k+4}{2k(n-2)}\pi.$$

故对这 n 个点，$\lambda_n\geqslant 2\sin\dfrac{kn-4k+4}{2k(n-2)}\pi$，证毕.

例 7 平面上一个封闭有界图形 Φ 有下面性质：Φ 中任何两点，都可用 Φ 中的半圆连结，求出图形 Φ.



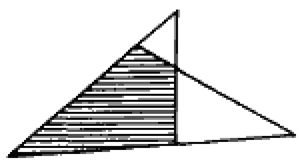
分析 Φ 有类似于凸集的性质，我们想办法充分利用它，注意到 Φ 是个有界图形，考虑极端原理.

解 在 Φ 中取距离最大的两点 A,B，并以 AB 为直径作圆 C. 我们要证明 Φ 是以 C 为边界的圆盘，AB 把圆 C 分成两个半圆 C_r 和 C_l. 则 $C_r\in\Phi$ 或 $C_l\in\Phi$，设 $C_r\in\Phi$.

取 C 内的一点 P，过 P 作 AP 的垂线交 C 于 M,N. M,N 不会都在 C_r 上也不会都在 C_l 上，否则，P 不在 C 内. 设 N 在 C_r 上，以 AN 为直径的不过 P 的半圆不会都在 Φ 内，因为过 A 点的 C 的切线是这半圆的割线(另一交点为 K)，则 $|BK|>|AB|$. 与 AB 的最大性质矛盾. 所以以 AN 为直径的过 P 的半圆在 Φ 中，从而 $P\in\Phi$. 推知 C 内的点都在 Φ 中，因为 Φ 是封闭的，所以 $C\in\Phi$. 而 Φ 中不会有点在 C 外，否则，这与 $|AB|$ 的最大性矛盾.

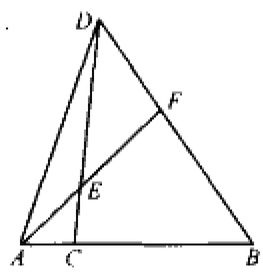
故所求图形 Φ 为圆盘.

例 8 古城堡里有一块任意形状的广场，设立卫兵哨位时希望他能从所站位置到广场的每一个角落，请问可以设哨的区域是什么形状？



分析 如果广场是凸形，那么每一点都可以，如果广场是凹四边形，那么可以设哨的区域是如图阴影部分，是一个凸形，我们可以猜想对任意形状的广场，可以设哨的区域是一个凸形，我们可以转化为证明如下命题.

M 为一点集，点 $A\in M$，如果对于任意一点 $B\in M$，线段 AB 上的每一点都属于 M，那么就说对 A 能视点集 M，M 中所能看见的点组成一个集合 N，则 N 是一个凸集.



这里 M 相当于广场，而 N 就相当于可以设哨的区域.

证明 设点 $A,B\in N$，C 为线段 AB 上任意一点，要证明 $C\in N$.

根据点集 N 的定义，A 可看见 M，因为 $B\in M$，所以线段 AB 上每一点属于 M，因此 $C\in M$.

设 D 为点集 M 中任意一点，E 为线段 CD 上任意一点，要证明 $C\in N$. 只要证明 $E\in M$. 连结 BD,AE，延长 AE 与 BD 交于 F，因为

$B\in N$，所以 $F\in M$.

因为 $A\in N$，$F\in M$，所以线段 AF 上的点全属于 M，特别地点 $E\in M$.

证毕！

注意：N 可能是空集或由一点组成.

例 9 平面上给定七个点，其中无三点共线. 求证：一定可将这些点分为一个三角形与一个凸四边形的顶点，且两图形无公共部分.

分析与解 设这七个点为 A,B,C,D,E,F,G，考虑其凸包，分几种情况讨论：

①若凸包为凸七边形 $ABCDEFG$，则 $\triangle ABC$ 与凸四边形 $DEFG$ 无公共点；

②若凸包为凸六边形 $ABCDEF$，连 AD，则 G 在凸四边形 $ABCD$（或 $ADEF$）内，这时$\triangle BCG$ 与凸四边形 $ADEF$ 无公共部分；

③若凸包为凸五边形 $ABCDE$，F,G 在其内部. 则当直线 FG 的一侧只有一个点 A，另一侧有四个点 B,C,D,E 时，$\triangle AFG$ 与凸四边形 $BCDE$ 无公共部分；当直线 FG 的一侧有两个点 A,B，另一侧有三个点 C,D,E 时，$\triangle CDE$ 与凸四边形 $ABFG$ 无公共部分；

④若凸包为凸四边形 $ABCD$，F,G 在其中，考虑三直线 EF,FG,GE 关于$\triangle EFG$ 的外侧（指不包含$\triangle EFG$ 的那侧）. 由抽屉原理知，A,B,C,D 中必有两点，同在这三条直线之一（设为 EF）的外侧. 当 EF 的外侧只有 A,B 两点时，则四边形 $ABEF$ 是凸的，且它与$\triangle CDG$ 无公共部分；当 EF 的外侧有 A,B,C 三点时，则四边形 $ABCE$ 是凸的，且它与$\triangle DFG$ 无公共部分；

⑤若凸包为$\triangle ABC$，D,E,F,G 在其中，分两种情况：

(a)若 D,E,F,G 的凸包是四边形 $DEFG$，考虑四条直线 DE,EF,FG,GD 关于凸四边形 $DEFG$ 的外侧（意义同上）. 若有一条直线（设为 DE）的外侧含有 A,B,C 中的两点 A,B，则四边形 $ABDE$ 是凸的，且它与$\triangle FGC$ 无公共部分. 若这四条直线每条的外侧都只有 A,B,C 之一，则易知 A,B,C 中每点不可能同在这四条直线中两条的外侧（如图 1）. 设 A 点仅在直线 DE 的外侧，且设$\angle BCF<\angle BCG$，则四边形 $AEGD$ 是凸的，且它与$\triangle BFC$ 无公共部分；

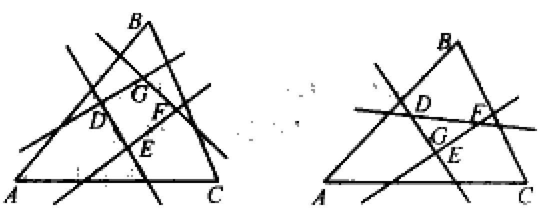


图 1　　图 2

(b)若 D,E,F,G 的凸包是$\triangle DEF$，G 在其中，考虑三条直线 DE,EF,FD 每条关于$\triangle DEF$ 的外侧. 若 DE 的外侧有 A,B,C 中的两点 A,B，则凸四边形 $ABDE$ 与$\triangle CFG$ 无公共部分. 若 DE,EF,FD 每条直线的外侧仅有 A,B,C 之一，则易知 A,B,C 中每点不可

能同在这三条直线中两条的外侧(如图2). 设 A 仅在直线 DE 的外侧,则四边形 $AEGD$ 是凸的,且它与 $\triangle BFC$ 无公共部分. (2001年集训队)

例10 (海莱定理)在平面上,设 $M_1, M_2, \cdots, M_n (n\geqslant 3)$ 都是凸图形,如果其中每三个凸图形都有公共点,那么这 n 个凸图形必有公共点.

分析与解 对凸图形个数 n 用数学归纳法.

当 $n=3$ 时命题显然成立.

设 $n=k(k\geqslant 3)$ 时命题成立,我们证明命题对于 $n=k+1$ 成立.

由于 k 个凸图形 $M_2, M_3, \cdots, M_k, M_{k+1}$ 中每三个有公共点,根据归纳假设,这 k 个凸图形有公共点 A_1. 同样设 $M_1, M_3, \cdots, M_k, M_{k+1}$ 这 k 个凸图形有公共点 A_2, $M_1, M_2, M_4, \cdots, M_{k+1}$ 这 k 个凸图形有公共点 A_3, $M_1, M_2, M_3, M_5, \cdots, M_{k+1}$ 这 k 个凸图形有公共点 A_4.

如果 A_1, A_2, A_3, A_4 这四个点中有相同的,设 A_1, A_2 相同,则 A_1 就是 $M_1, M_2, M_3, \cdots, M_{k+1}$ 这 $k+1$ 个凸图形的公共点,命题成立.

如果 A_1, A_2, A_3, A_4 是互不相同的四点,考察它们的凸包 H.

(1) H 为凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$,这时线段 A_1A_3 与 A_2A_4 相交于点 A. 因为 $A_1\in M_2$, $A_3\in M_2$, M_2 是凸图形,所以 $A_1A_3\subseteq M_2\Rightarrow A\in M_2$,同理 $A\in M_4, A\in M_5, \cdots, A\in M_{k+1}$. 又因为 $A_2\in M_1, A_4\in M_1, M_1$ 是凸图形,所以有 $A\in M_1$,同理可证 $A\in M_3$. 因此,A 是 $M_1, M_2, M_3, \cdots, M_{k+1}$ 这 $k+1$ 个凸图形的公共点.

(2) H 为 $\triangle A_1A_2A_3$,这时因为 A_1, A_2, A_3 都属于 M_4,所以 $\triangle A_1A_2A_3\subseteq M_4$,从而由 $A_4\in\triangle A_1A_2A_3\Rightarrow A_4\in M_4$. 因此 A_4 是 $M_1, M_2, M_3, \cdots, M_{k+1}$ 这 $k+1$ 个凸图形的公共点.

(3) H 为一线段 A_1A_2,这时 $A_4\in A_1A_2\subseteq M_4$,所以 A_4 是 $M_1, M_2, M_3, \cdots, M_{k+1}$ 这 $k+1$ 个凸图形的公共点.

综上所述,问题得证.

同步检测7

1. 平面给出22个点,其中无三点共线. 证明:可将这些点配成11对,使每对点连成的线段之间至少有5个交点.

2. 平面上给定六个点,证明:这些点确定的最大距离与最小距离之比不小于 $\sqrt{3}$.

3. 设 F 和 G 是平面上的两个凸多边形,H 是所有这样的点的集合,它是一个端点在 F 中,另一个端点在 G 中的线段的中点. 证明:H 为凸集.

4. 有限个多边形(不一定是凸的)中任何两个都有公共点. 证明:有一条直线与每个

多边形有公共点.

5. 求平面直角坐标系中格点凸五边形(即每个顶点的纵、横坐标都是整数的凸五边形)的周长的最小值. (1997年爱朋思杯—上海市高中数学竞赛决赛题)

6. 在平面内给定一个有限点集,其中任何三点不共线,且对于集中任何3点 A,B,C. $\triangle ABC$ 的垂心也在此集中,求所有这样的集合.

(1992年第18届全俄数学奥林匹克试题).

7. 平面上给出 $2n+3$ 个点,其中任三点不共线,任4点不共圆. 证明:从这些点中能够选取三个点,使剩余的点中有 n 个位于过这三点的圆的内部,而另 n 个点位于这个圆的外部.

8. 设 A,B 是平面上的两个有限点集,无公共元素,并且 $A\cup B$ 中任三点不共线,如果 A,B 中有一个点集至少包含5个点,证明:存在一个三角形,它的顶点都在 A 中或都在 B 中,且内部不包含另一个集合的点.

9. 在平面上给定6个点,其中任何三点都不在一直线上. 证明:在这6个给定的点中,可以挑出这样三个点,使得在这三个点构成的三角形中,有一个角不小于 $120°$.

参考答案

第1讲　组合计数

1. C　2. D　3. B

4. 从这10个数中取出3个不同的偶数的取法有C_5^3种；取出1个偶数和2个不同的奇数的取法有$C_5^1C_5^2$种.

从这10个数中取出3个数，使其和为小于10的偶数，有如下9种不同取法：(0，1，3)，(0，1，5)，(0，2，4)，(1，2，3)，(0，1，7)，(0，2，6)，(0，3，5)，(1，2，5)，(1，3，4). 因此，符合题设要求的不同取法有$C_5^3+C_5^1C_5^2-9=51$种.

5. 解：设直线倾斜角为θ，则$\tan\theta=-\frac{a}{b}>0$. 不妨设$a>0$，$b<0$.

(1)$c=0$，则a有3种取法，b有3种取法，排除2个重复的(注：$3x-3y=0$，$2x-2y=0$与$x-y=0$为同一直线)，故这样的直线有$3\times3-2=7$条.

(2)$c\neq0$，则a有3种取法，b有3种取法，c有4种取法，且其中任两条直线均不相同，故这样的直线有$3\times3\times4=36$条.

从而符合要求的直线有$7+36=43$条.

6. $\frac{1}{3}C_{51}^{5}$

7. 89

8. 84

9. $C_{17}^{6}\cdot7!\cdot25!=\frac{16!\cdot25!}{9!}$

10. 这是个项链排列. 固定白珠，即变成线排列，共有$\frac{(6+8)!}{6!\cdot8!}=3003$种，其中，关于白球对称的串法共有$\frac{7!}{3!\cdot4!}=35$种，不对称的串法共有$3003-35=2968$种. 所以，不同的种类为$35+\frac{1}{2}\times2968=1519$种.

11. 证明：记 n 个点为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$，设到 P_i 的距离为单位长的已知点有 e_i 个（$i=1,2,\cdots,n$）. 于是距离为单位长的点对数

$$E=\frac{1}{2}(e_1+e_2+\cdots+e_n).$$

以 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 为圆心，单位长为半径作圆 $\odot P_1, \odot P_2, \cdots, \odot P_n$. 于是 $\odot P_i$ 上有 e_i 个已知点（$i=1, 2, \cdots, n$）.

若 P_i 是 $\odot P_k$ 与 $\odot P_j$ 的交点，则将 $P_i, \odot P_k, \odot P_j$ 形成一个三元组合 $\{P_i, \odot P_k, \odot P_j\}$，设这种三元组合的集合为 S.

一方面，任意两个圆周至多交于 2 点，至多形成 2 个三元组，n 个圆一共最多形成 $2C_n^2$ 个三元组，所以 $|S|\leqslant 2C_n^2$.

另一方面，在 $\odot P_i$ 上任取两点 P_j, P_k，于是 P_i 与 $\odot P_j, \odot P_k$ 形成一个三元组. 故由 $\odot P_i$ 上任取两点，共同形成 $C_{r_i}^2$ 个三元组（$i=1,2,\cdots,n$）.

所以 $|S|=C_{r_1}^2+C_{e_2}^2+\cdots+C_{r_n}^2$.

比较两个方面得

$$2C_n^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}C_{r_i}^2=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}e_i^2-\sum_{i=1}^{n}e_i\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}e_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}e_i\right),$$

即 $n(n-1)\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{4E^2}{n}-2E\right)$.

解得 $E\leqslant\frac{n+\sqrt{n^2+8n^2(n-1)}}{4}=\frac{n+\sqrt{n^2(8n-7)}}{4}<\frac{n+\sqrt{8n^3}}{4}=\frac{n}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}n^{\frac{3}{2}}$.

12. 解：定义 $S_k=\{A\mid A\subset S, |A|=41, 且 \sum_{x\in A}x\equiv k(\mathrm{mod}5)\}, k=0,1,2,3,4$.

以及映射 $f: S_0\rightarrow S_k \quad (1\leqslant k\leqslant 4)$

若 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_{11}\}\in S, 1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{11}\leqslant 2000$.

则 $f(A)=\{a_1+k, a_2+k, \cdots, a_{41}+k\}$. 当 $a_i+k>2000$ 时，且 $a_i+k-2000$ 代替.

则不难看出 $f(A)\in S_k$.

容易验证 f 为双射. 所以，$|S_0|=|S_k|\ (1\leqslant k\leqslant 4)$.

设这个数为 a，则 $5a=|S_0|+|S_1|+\cdots+|S_4|=C_{2000}^{11}$，

所以 $a=\frac{1}{5}C_{2000}^{1}$，即 S 的好子集的个数为 $\frac{1}{5}C_{2000}^{1}$.

13. 解：共有 12 种不同的方法. 考虑 1 到 100 之间的整数，为简便起见，将整数 i 所放入的盒子颜色定义为该整数的颜色. 用 r 代表红色，w 代表白色，b 代表蓝色.

(1) 存在某个 i，使得 $i, i+1, i+2$ 的颜色互不相同，例如颜色为 rwb. 因 $i+(i+3)=(i+1)+(i+2)$，所以 $i+3$ 的颜色既不能是 $i+1$ 的颜色 w，也不能是 $i+2$ 的颜色 b，只能

是 r. 可见只要三个相邻的数字有互不相同的颜色，就能够确定下一个数字的颜色. 进一步地，这三个数字的颜色模式必定反复出现：rwb 后面一定是 r，然后又是 w，b，…依此类推. 同理可得上述过程对于相反方向也成立：rwb 的前面一定是 b，w，…依此类推.

因此，只需确定 1，2，3 的颜色. 而这有 6 种不同方法，这 6 种方法都能够使魔术成功，因为它们的和 $r+w$，$w+b$，$b+r$ 给出模 3 互不相同的余数.

(2) 不存在三个连续的数字，其颜色互不相同. 假设 1 是红色的，令 i 为最小的不是红色的数字，不妨假设 i 为白色的，再设 k 为最小的蓝色数字，则由假设必有 $i+1<k$.

如果 $k<100$，因为 $i+k=(k+1)$，所以 $k+1$ 一定是红色的，但又由于 $i+(k+1)=(i+1)+k$，所以 $i+1$ 一定要是蓝色的，与 k 是最小蓝色数字相矛盾. 故得 k 必须等于 100. 换言之，只有 100 是蓝色的.

我们再来证明只有 1 是红色的，不然的话，设存在 $t>1$ 是红色的，则由 $t+99=(t-1)+100$ 推出 $t-1$ 是蓝色的，与只有 100 是蓝色的相矛盾.

于是这些数字的颜色必须是 $rww\cdots wwb$. 而这种方法确定可行.

如果被选取的两张卡片上的数字之和 $\leqslant 100$，则没有从中选取卡片的盒子一定是蓝色的.

如果被选两张卡片的数字之和为 101，则没有从中选取卡片的盒子一定是白色的.

如果数字之和 >101，则没有从中选取卡片的盒子一定是红色的.

而上述这种排列颜色的方法也有 6 种.

故答案为 12.

第 2 讲　抽屉原理

1. 解：设这 19 个数为 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{19}\leqslant 90$，

由于 $a_{19}-a_1=(a_{19}-a_{18})+(a_{18}-a_{17})+\cdots+(a_2-a_1)$，

若右边的 18 个差中无三个相等，而只有两个相等，且取最小的，则

$a_{19}-a_1>2(1+2+\cdots+19)=90$，

这与 $a_{19}-a_1\leqslant 90-1=89$ 矛盾.

所以两两的差中定有三个相等.

2. 证明：给定的数共有 34 个，其相邻两数之差均为 3，我们把这些数分成如下 18 个不相交的集合：$\{1\}$，$\{52\}$，$\{4,100\}$，$\{7,97\}$，…，$\{49,55\}$.

且把它们分成 18 个抽屉，从已知的 34 个数中任选 20 个数，即使把前面两个抽屉中的数 1 和 52 都取出，则剩下的 18 个数在后面的 16 个抽屉中至少有不同的两个抽屉中的数全被取出，这两个抽屉中的数互不相同，每个抽屉中的两个数的和都是 104.

3. 证明：对严格单调递增的数列 $\{a_n\}$ 取以 a_1 为模的剩余类，则可分为 a_1 个类：

$\{0\},\{1\},\{2\},\cdots,\{a_1-1\}$.

考虑无穷数列 $a_2,a_3,\cdots$，根据抽屉原理，其中有无穷多项属于同一类，不妨设这一剩余类为$\{r\}$，且记其中数值最小的那一项为 a_q，显然 $q>1$. 因此 $a_q=ua_1+r$，其中 u 是某个正整数. 其他的属于这一剩余类的任一项 a_m，可表示为 $a_m=va_1+r$. 由于 $a_m>a_q$，故 $v>u$，所以 $a_m=va_1+a_q-ua_1=(v-u)a_1+a_q$.

令 $x=v-u$，这是一个正整数，取 $y=1$，则上式变为 $a_m=xa_1+ya_q$.

显然，这里 $p=1<q$.

4. 解：考虑不全为零的 7 个数组(x,y,z)，其中 $x,y,z\in\{0,1\}$. 容易证明：当 a_j,b_j,c_j 不全为偶数，则集合 $A_j=\{xa_j+yb_j+zc_j\mid x,y,z\in\{0,1\}\}$ 中，恰有 4 个为偶数，也恰有 4 个为奇数，这里 $1\leqslant j\leqslant N$. 当然，当 $x=y=z=0$ 时，$xa_j+yb_j+zc_j$ 为偶数.

由上述结论可知，$\{xa_j+yb_j+zc_j\mid x,y,z\in\{0,1\}$，$x,y,z$ 不全为零，$1\leqslant j\leqslant N\}$ 中，恰有 $4N$ 个数为奇数.

因此，由抽屉原理，可知存在一组数(x,y,z)，$x,y,z\in\{0,1\}$，x,y,z 不全为 0，使得 $\{xa_j+yb_j+zc_j\mid 1\leqslant j\leqslant N\}$ 中至少有 $\frac{4N}{7}$ 个奇数.

5. 证明：按整数除以 n 的余数的不同可把全部整数分成 n 类（视为 n 个"抽屉"）.

考察下列 $n+1$ 个数：

$1,11,111,\cdots,\underbrace{111\cdots11}_{n+1}$

若这 $n+1$ 个数中有能被 n 整除者，结论得证.

若这 $n+1$ 个数都不能被 n 整除，则由抽屉原理知必有两数被 n 除同余，不妨设其为 $\underbrace{111\cdots11}_{l},\underbrace{111\cdots11}_{k}(l<k)$.

则 $\underbrace{111\cdots11}_{k}-\underbrace{111\cdots11}_{l}=\underbrace{11\cdots11}_{k-l}\underbrace{00\cdots0}_{l}=\underbrace{11\cdots1}_{k-l}\times10^l$，能被 n 整除，即 $n\left|\underbrace{11\cdots1}_{k-l}\times10^l\right.$.

但由假设 n 不整除 $\underbrace{11\cdots1}_{k-l}$，故 $n\mid10^l$，因此 n 必为 2 或 5 的倍数，与题设矛盾.

于是这 $n+1$ 个数中必有被 n 整除者.

评注：该题的证明是抽屉原理与反证法的综合运用.

6. 证明：首先用抽屉原理证明：平面上任意五个不同的整点中，必存在两个整点，它们所连线段的中点也是整点.

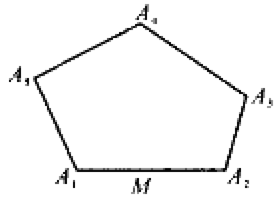
有序整数对(x,y)按奇偶性可分为四类：（奇，奇），（奇，偶），（偶，奇），（偶，偶）. 由于有五个整点，则至少有两个整点属于同一类，设这两个整点为(x_1,y_1)和(x_2,y_2). 由于 x_1 和 x_2 以及 y_1 和 y_2 都有相同的奇偶性，从而 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 和 $\frac{y_1+y_2}{2}$ 都是整数，即这两个整点的

连线段的中点也是整点.

下面证明本题. 因为是凸五边形,则 M 点在此五边形的内部或者边界上.

(1)若 M 在凸五边形的内部,这时连接 M 与五个顶点 $A_i(i=1,2,3,4,5)$ 得到五个整点三角形,因为每个整点三角形的面积不小于$\frac{1}{2}$,所以这个凸五边形的面积不小于$\frac{5}{2}$.

(2)若 M 在凸五边形的边界上,设 M 是 A_1A_2 的中点(如图).



由于 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 为凸五边形,则 A_3A_4,A_4A_5 中必有一边与 A_1A_2 不平行,设 A_3A_4 与 A_1A_2 不平行.

则$\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle MA_3A_4$、$\triangle A_1A_2A_3$ 的面积互不相同. 又因为每个三角形都是整点三角形,其面积均为$\frac{1}{2}$的整数倍,所以最大的一个必不小于$\frac{3}{2}$. 设$\triangle A_1A_3A_4$ 的面积不小于$\frac{3}{2}$,于是有

$$S_{凸五边形}=S_{\triangle A_1A_3A_4}+S_{\triangle A_1A_2A_3}+S_{\triangle A_1A_4A_5}\geqslant\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\geqslant\frac{5}{2}.$$

7. 证明:设 $A_0,A_1,\cdots,A_k(k=(n+1)(m-1)+1)$是已知的$(n+1)(m-1)+2$个点,先取一定点 A_0,把点 A_0 与其他各点连成$(n+1)(m-1)+1$条线段,并任意染 $n+1$ 色,由抽屉原理知,其中必有$\left[\frac{(n+1)(m-1)+1}{n+1}\right]+1=m$ 条线段是同色的,不妨设 A_0A_1,A_0A_2,$\cdots$,A_0A_m 都染第 $n+1$ 种颜色. 这时考察 A_0A_1,A_0A_2,$\cdots$,A_0A_m 的 m 个端点 A_1,A_2,$\cdots$,A_m 之间线段的染色情况,实际上仅有下列两种情形:

①在这些线段中至少有一条染了第 $n+1$ 种颜色,如 A_1A_2,则$\triangle A_0A_1A_2$ 就是所求的同色三角形,命题成立.

②与情形①相反,这些线段中没有一条染了第 $n+1$ 种颜色,于是只能染 n 种颜色,因为这时问题就归结为 m 点染 n 色的问题了,由题设即知命题亦成立.

说明:我们用记号 $R(n)$表示任意染 n 色必有一个同色三角的最少点数,则由上例可知 $R(n+1)\leqslant(n+1)[R(n)-1]+2$.

由 $R(1)=3$,可知 $R(2)\leqslant6$,$R(3)\leqslant17$,$R(4)\leqslant66$,$R(5)\leqslant327$,$R(6)\leqslant1958$. 这些结果是不精确的,事实上,可以证明 $R(2)=6$, $R(3)=17$, $R(4)=65$, $R(5)\leqslant322$,$R(6)\leqslant1928$. 但目前为止,当 $n\geqslant5$ 时,$R(n)$的值还是未知的.

8. 证明:我们仅仅考察将纸带剪成 38 段,其中 4 段上各有 3 个数字,其余的 34 段上各有两个数字的情形. 这时,4 个 3 位数的和小于 4000,34 个两位数的和小于 3400,故全部相加所得的和小于 7400. 但是,将纸带剪成 38 段,其中 4 段上各有 3 个数字,余下 34 段上各有两个数字的不同剪法的种数为 $C_{38}^{4}>30\times30\times30=27000$. 由抽屉原理知,必有两种不同的剪法,使得最后得到的和数相等.

9. 证明：取 $n>2c+1$，则任意一个边长为 $n-1$ 的正方形内部能作一个半径为 c 的圆. 从而正方形内部至少有一个染了色的整点. 于是在每个以 $(rn+1, sn+1)$，$(rn+n, sn+1)$，$(rn+1, sn+n)$，$(rn+n, sn+n)$ 为顶点的正方形内部至少可标出一个染色的整点 $A_{r,s}(x_{r,s}, y_{r,s})(r, s\in Z)$.

对于每个给定的 r，考虑 $kn+1$ 个点，$A_{r,0}, A_{r,1}, \cdots, A_{r,kn}$，这 $kn+1$ 个点的横坐标为 $rn+1, rn+2, \cdots, rn+n$ 这 n 个值之一. 由抽屉原理，必有至少 $k+1$ 个点的横坐标相同，而这些横坐标相同的点所染的颜色只有 k 种可能，从而存在两个横坐标相同的点同色.

即存在 $0\leqslant s_1<s_2\leqslant k_n$，使得 $X_{r,s_1}=X_{r,s_2}$，且 A_{r,s_1}, A_{r,s_2} 同色. 设它们均为第 j 种颜色 $(1\leqslant j\leqslant k)$，则称 (Y_{r,s_1}, Y_{r,s_2}) 为 j 色坐标对. 这里 $1\leqslant Y_{r,s_1}<Y_{r,s_2}\leqslant kn^2+n$.

取 $t>kC_{kn^2+n}^2$ 种，故存在至少 $k+1$ 个同色坐标对，设为

$(Y_{r_1,s_1}, Y_{r_1,s_2})=(Y_{r_2,s_1}, Y_{r_2,s_2})=\cdots=(Y_{r_{k+1},s_1}, Y_{r_{k+1},s_2})$，其中 $0\leqslant r_1<r_2<\cdots<r_{k+1}\leqslant t$.

所以对应的 $k+1$ 个点对 $(Y_{r_1,s_1}, Y_{r_1,s_2})$，$(Y_{r_2,s_1}, Y_{r_2,s_2})$，$\cdots$，$(Y_{r_{k+1},s_1}, Y_{r_{k+1},s_2})$ 的染色仅有 k 种可能（每个点对染一种颜色），故有两个点对同色，设为 $(A_{r_i,s_1}, A_{r_i,s_2})$ 和 $(A_{r_j,s_1}, A_{r_j,s_2})$ 同色，这里 $1\leqslant i<j\leqslant k+1$.

所以以 $A_{r_i,s_1}, A_{r_i,s_2}, A_{r_j,s_1}, A_{r_j,s_2}$ 为顶点的矩形即满足要求.

第 3 讲　容斥原理

1. 42

2. 542857

3. 666

4. 5760

5. 解：注意到 3，4，5 的最小公倍数是 60，那么新数列中的数 A_k 可以表示为 $60m+r$，其中 m 为非负整数，r 是 $1, 2, \cdots, 60$ 中划去 3 和 4 的倍数，但不划去 5 的倍数后留下的数.

显然对于每一个确定的 m，$60m+r$ 与 r 一一对应，同为新数列中的数. 现只需求出 r 所有可能取的数的个数.

令 $I=\{1, 2, \cdots, 60\}$，$B_i=\{x\mid x\in I, \text{且 } i+2\mid x\}$，$i=1, 2, 3$.

则 $|I|=60$，$|B_1|=\left[\dfrac{60}{3}\right]=20$，$B_2=\left[\dfrac{60}{4}\right]=15$，$|B_1\cap B_2|=\left[\dfrac{60}{3\times 4}\right]=5$，

同理 $|B_2\cap B_3|=3$，$|B_3\cap B_1|=4$，$|B_1\cap B_2\cap B_3|=1$.

由逐步淘汰原理，得

$$|\overline{B_1\cup B_2\cup B_3}|=|I|-\sum_{i=1}^{3}|B_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}|B_i\cap B_j|-|B_1\cap B_2\cap B_3|,$$

$$|\overline{B_1\cup B_2\cup B_3}|=60-(20+15+|B_3|)+(5+4+3)-1,$$

所以 $|\overline{B_1\cup B_2\cup B_3}|+|B_3|=36$，又 $2006=36\times55+26$，$A_{26}=43$.

故 $A_{2006}=60\times55+43=3343$.

6. 解：设能被 n 整除的三位数的个数为 x_n，则 $x_n=\left[\frac{999}{n}\right]-\left[\frac{99}{n}\right]$，根据包含容斥原理可知，需求的三位数的个数为

$x_3+x_7-x_{3,7}-x_{3,5}-x_{3,7}+x_{1,3,7}=180+128-26-60-43+9=188$.

7. 解：(1)4 位数由高位到低位的数字分别设为 a,b,c,d，则由题意知 a 取 9 个值，b 必取 $10-2=8$ 个值，c 必取 $(10-2)-2=6$ 个值，d 必取 $(10-4)-2=4$ 个值，因此，4 位数共有 $9\times(10-2)\times(10-4)\times(10-6)]=1728$ 个.

(2)由题意知 S 中 1 位数有 9 个，2 位数有 72 个，3 位数有 432 个，则

$9+72+432=531<2000<513+1728=2241$.

所以第 2000 个数是 4 位数.

又大于 8695 的四位数有 $1+2\times(6\times4)8\times6\times4=241$ 个，

从而知第 2000 个数为 8695.

8. 解：最小的 n 为 217.

一方面，令 $A_i(i=2,3,5,7)$ 为 S 中被 i 整除的数的集合，$A=A_2\cup A_3\cup A_5\cup A_7$.

由容斥原理可得

$|A|=|A_2|+|A_3|+|A_5|+|A_7|-|A_2\cap A_3|-|A_2\cap A_5|-|A_2\cap A_7|-|A_3\cap A_5|-|A_3\cap A_7|-|A_5\cap A_7|+|A_2\cap A_3\cap A_5|+|A_2\cap A_3\cap A_7|+|A_2\cap A_5\cap A_7|+|A_3\cap A_5\cap A_7|-|A_2\cap A_3\cap A_5\cap A_7|=216$.

在 S 中取 A 的 216 个元素，这 216 个元素中任 5 个必有两个属于 A_2,A_3,A_5,A_7 中的某一个集合，则这两个元素不互素，从而这 216 个元素中任意 5 个数均非两两互素，

所以 $n\geqslant217$.

接下来，还要证明 S 中任意 217 个元素中必有 5 个数两两互素.

令 $B_1=\{1\}\cup\{S$ 中的所有素数$\}$，

$B_2=\{2^2,3^2,5^2,7^2,11^2,13^2\}$，

$B_3=\{2\times131,\ 3\times89,\ 5\times73,\ 7\times37,\ 11\times23,\ 13\times19\}$，

$B_4=\{2\times127,\ 3\times83,\ 5\times47,\ 7\times31,\ 11\times19,\ 13\times17\}$，

$B_5=\{2\times113,\ 3\times79,\ 5\times43,\ 7\times29,\ 11\times17\}$，

$B_6=\{2\times109,\ 3\times73,\ 5\times41,\ 7\times23,\ 11\times137\}$.

易知对 $1\leqslant i\leqslant6$，B_i 中的任两个数均两两互素.

再来计算 $|B_1|$，由数论的基本知识知，n 为素数的充分必要条件是它没有小于等于 $\sqrt{n}$ 的且大于 1 的因子. 由于 $\sqrt{280}<17$，故我们只需把 S 中的 2，3，5，7，11，13 的不是它们

本身倍数的全部删除，得到的便是集合 B_1（读者可在纸上演算一下），计算得 $|B_1|=60$.

记 $B_7=S\backslash(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_6)$，

则 $|B_7|=280-60-6\times3-5\times2=192$.

所以 S 中任意 217 个元素中至少有 $217-192=25$ 个元素 $\in B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_6$，故由抽屉原理，必有 5 个元素同属于某一个 $B_j(1\leqslant j\leqslant6)$，则这 5 个元素两两互素.

综上讨论可得，所求 n 的最小值为 217.

第 4 讲　极端原理

1. 证明：设 A 是三角形中的最小角，则 $A\leqslant60^\circ$，所以 $S=\frac{1}{2}bc\sin A<\frac{1}{2}\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

2. 提示：设凸多边形内一点 O 到各边所在直线中的边 AB 的距离最近. 如果 O 向 AB 的垂线足 H 在线段 AB 的延长线上，那么 OH 与多边形的其他边相交，会得出点 O 到其他边距离比到 AB 距离更近，从而矛盾.

3. 证明：显然，必有一个女生认识的男生最多，不妨设女生 a_1 认识的男生最多. 因为每个女生不全认识 n 个男生，所以存在一个男生 b_1 与 a_1 不认识. 由条件可知，每个男生至少认识一个女生，设男生 b_1 认识女生 a_2. 注意到 a_1 是认识男生最多的女生，因此，必有一个男生 b_2 与 a_1 相识，而不与 a_2 相识（否则，与 a_1 相识的男生都与 a_2 相识，从而 a_2 认识的男生比 a_1 认识的男生多，矛盾）.

于是，对于 a_1,a_2,b_1,b_2，女生 a_1 仅仅认识男生 b_2，女生 a_2 仅仅认识男生 b_1.

4. 证明：设 A 是获胜场次最多的运动员之一，他共战胜了 k 个对手 $B_1,B_2,\cdots,B_k$，而负于 m 个对手 $C_1,C_2,\cdots,C_m$. 若有某个 C_i，他全胜 $B_1,B_2,\cdots,B_k$，由于他又战胜 A，故他比 A 还多胜一场，矛盾. 故知 C_i 必负于某个 B_j（B_j 为 A 的手下败将）. 可见，A 即为所求.

5. 解：设 $T=(a_1,a_2,\cdots,a_{100})$ 是从 1 到 100 的全部正整数的一个排列.

令 $S=\left\{S_n\middle|S_n=\sum\limits_{i=1}^{10}a_{i+n},n=0,1,2,\cdots,90\right\}$，显然 S 中必有最大数，记为 S_T.

即 $S_T=\max\limits_{0\leqslant n\leqslant90}\sum\limits_{i=1}^{10}a_{i+n}$.

所以 $10S_T\geqslant\sum\limits_{i=1}^{100}a_i=5050$，

所以 $S_T\geqslant505$.

下证 S_T 的最小值为 505.

事实上，取 $T'=(100,1,99,2,98,3,97,4,\cdots,51,50)$，此时有

$a_{2k}+a_{2k+1}+\cdots+a_{2k+9}$

$=(a_{2k}+a_{2k+2}+\cdots+a_{2k+8})+(a_{2k+1}+a_{2k+3}+\cdots+a_{2k+9})$

$=[k+(k+1)+\cdots+(k+4)]+[(100-k)+(100-k-1)+\cdots+(100-k-4)]$

$=500.$

$a_{2k+1}+a_{2k+2}+\cdots+a_{2k+10}$

$=(a_{2k}+a_{2k+1}+\cdots+a_{2k+9})+(a_{2k+10}-a_{2k})$

$=500+(k+5)-k=505.$

此时 $S_T\leqslant 505$，故 $A=505$.

6. 证明：因 $\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\cdots,\frac{a_n}{b_n}$ 这 n 个数中必有最小数，不妨设为 $\frac{a_1}{b_1}$，即 $\frac{a_1}{b_1}\leqslant\frac{a_i}{b_i}(i=1,2,\cdots,n)$.

由于 $b_i>0$，于是

$\frac{a_1}{b_1}\cdot b_i\leqslant a_i,\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2\cdot b_i^2\leqslant a_i^2,i=1,2,\cdots,n.$

因此 $\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\leqslant a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，

所以 $\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2\leqslant 1$，即 $\frac{a_1}{b_1}\leqslant 1$.

7. 解：考虑最差情形，先摸出 4 只袜子，这 4 只袜子的颜色互不相同. 再摸出第 5 只袜子，必有 4 种颜色之一的颜色，故至少摸出 5 只袜子才能确保至少有一双. 拿出这一双，考虑最不利的情况，剩下 3 只袜子的颜色互不相同. 再摸出第 6 只袜子，又考虑最不利情况，这只袜子可能具有第四种颜色，于是摸出第 7 只袜子就必须具有四种颜色之一. 故至少摸出 7 只袜子才能确保有两双. 依次类推，以后每摸出 2 只，必又可确保有一双. 因此，至少摸出 23 只才能确保有十双.

8. 证明：在所给的 1995 个点中，必有两点的距离最小，设这两点为 P_1 和 P_2.

由已知，这 1995 个点不在同一直线上，因此在直线 P_1P_2 外有已知的点，考虑这些点对线段 P_1P_2 的张角，显然，这些张角都是锐角. 这些张角至多有 1993 个，因此，必有一个最大角. 设 P_3 不在 P_1P_2 上，且 $\angle P_1P_3P_2$ 最大. 过 P_1,P_2,P_3 作一圆，则圆 $P_1P_2P_3$ 就是所求的圆.

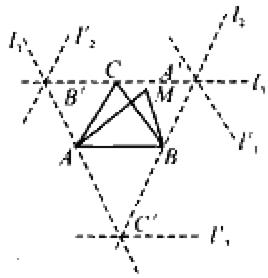
9. 证明：若 M 中每两点的距离都小于或等于 1，则在 M 中任取一点为圆心，1 为半径作圆，必能覆盖全部的 25 个点，当然能覆盖其中的 13 个点.

若有两点的距离大于 1，设 AB 是 M 中距离最大的两点，$AB>1$. 因为每三点中都有两点的距离小于 1，于是，对于异于 A,B 的任意一点 C，则或者 $AC<1$，或者 $BC<1$.

分别以 A,B 为圆心，以 1 为半径作⊙A 和⊙B，则点 C 总会落在⊙A 或⊙B 内，于是除 A,B 两点外，其余 23 个点总会落入⊙A 或⊙B 中的一个内，因此有一个圆内至少有 12 个点，不妨设其为⊙A，连同圆心，则⊙A 至少覆盖 M 中的 13 个点.

第 5 讲　组合几何

1. 证明：设内接于凸多边形 P 的三角形中，以 $\triangle ABC$ 的面积为最大（显然 $S_{\triangle ABC}<1$），M 是多边形 P 内的任意一点，则 $S_{\triangle MAB}\leqslant S_{\triangle ABC}$. 由于这两个三角形同底 AB，所以 M 点的轨迹是双轨平行线 l_1 与 l'_1 所形成的带形区域，其中 l_1 与 l'_1 间的距离等于 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高的两倍.



对于 $\triangle MBC$、$\triangle MAC$ 做同样的讨论，从而得知多边形 P 的所有点属于三个带形区域的公共部分——$\triangle A'B'C'$，如图. 从而 $S_{\triangle A'B'C'}=4S_{\triangle ABC}<4$.

2. 解：设 l 与 G 的边界分别交于 X、Y，点 $p\in l_2\cap G$，连结 PX，PY 并延长分别交于 X_1，Y_1. (1) 因 $\triangle PXY\subset B$，故 $S_{\triangle PXY}\leqslant S_B$. 又 $A\subset$ 梯形 XYY_1X_1，故 $S_A\leqslant S_{XYY_1X_1}$，于是 $\dfrac{S_A}{S_B}\leqslant\dfrac{S_{XYY_1X_1}}{S_{\triangle PXY}}$，

由上式可知，G 为一边位于 l_1 上，而另一顶点在 l_2 上的三角形时，$\dfrac{S_A}{S_B}$ 达到最大.

(2) 设 $X_1Y_1=d$，则 $XY=bd/a+b$，

$S_{\triangle PX_1Y_1}=\dfrac{d}{2}(a+b)$，$S_{梯形XYY_1X_1}=\dfrac{a}{2}\left(d+\dfrac{bd}{a+b}\right)$

故 $\dfrac{S_A}{S_B}$ 的最大值 $M=\dfrac{S_{梯形XYY_1X_1}}{S_{\triangle PXY}}=\dfrac{a^2+2ab}{b^2}$.

3. 证明：(1) 如图 1，满足要求 $d(s)=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}+1-2\times\dfrac{\sqrt{3}}{6}=1+\sqrt{3}$，

所以 $\min\{d(s)\}\leqslant 1+\sqrt{3}$.

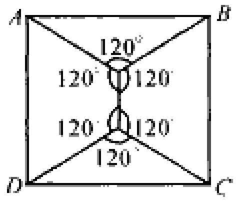


图 1

(2) 可以，如图 2，其中 E 为 BD 中点，$\angle DFC=\angle BFC=120°$，满足要求，

则 $d(s)=AE+DF+BF+FC$

$=\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{6}+\dfrac{\sqrt{6}}{6}\times 4=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}<1+\sqrt{3}$.

所以 $\min\{d(s)\}\leqslant\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

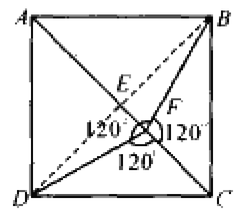


图 2

4. 证明：先证引理：平面上若有两个异色点的距离为 2，那么必定可以找出符合要求的三角形.

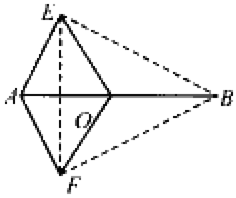


图 a

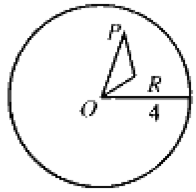


图 b

如图 a，若平面上 $AB=2$，A 为白点，B 为黑点. 不妨设 AB 中点 O 为白色，以 AO 为边作正三角形，顶点 E 或 F 中若有一个为白色，则符合条件的三角形已经找出；若 E 和 F 都为黑色，则正三角形 BEF 边长为$\sqrt{3}$，且 B,E,F 同色.

在平面上任取一点 O；不妨设 O 为白点，以 O 为圆心，4 为半径作圆(如图 b). 若圆内的点均为白点，则圆内边长为 1 的正三角形顶点都为白色；若圆内有一点 P 为黑点，则 $OP<4$，以 OP 为底边作腰长为 2 的等腰三角形 OPR，则 R 至少与 O,P 中的一点异色. 根据引理，也有符合要求的三角形.

5. 证明：考虑这六点的凸包，它是一个凸多边形，顶点是这些已知点的全体或一部分，如果凸包是六边形，那么必有一个内角 $\geqslant\frac{(6+2)\times180^\circ}{6}=120^\circ$. 设 $\angle ABC\geqslant120^\circ$，则 A,B,C 即为所求.

如果凸包是 $\triangle ABC$，那么有一已知点 D 在这三角形内. $\angle ADB$，$\angle BDC$，$\angle CDA$ 中必有一个 $\geqslant120^\circ$，结论成立.

如果凸包是四边形或五边形，用对角线将它们剖分为三角形，必有一个三角形中有已知点. 于是由上一种情形的讨论即得.

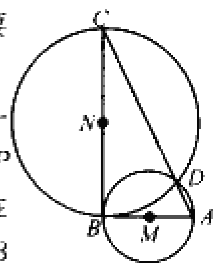
6. 证明：5 条线段的长度为 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e$.

假设由这些线段组成的任何三角形都不是锐角三角形，那么，在由 a,b,c；b,c,d；c,d,e 组成的三个三角形中，有 $c^2\geqslant a^2+b^2$，$d^2\geqslant b^2+c^2$，$e^2\geqslant c^2+d^2$.

将它们相加，得到 $e^2\geqslant a^2+2b^2+c^2\geqslant a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

从而 $e\geqslant a+b$. 这样，用 e,a,b 三条线段便不能组成三角形，矛盾. 因此，命题得证.

7. 解：先证 $\triangle ABC$ 折叠点所构成的集合是以 AB，BC 为直径的圆的内部的公共部分.



为此需证明：由顶点 A 和 B 折叠在 P 上所形成的折痕不相交的充要条件是 P 位于以 AB 为直径的圆的内部.

事实上，由任一点 Q 折到 P 所形成的折痕是 PQ 的垂直平分线的一部分. 若 P 在以 AB 为直径的圆外，那么 $\triangle PAB$ 是锐角三角形，因为 $\angle P$ 是锐角，$\angle PAB$ 和 $\angle PBA$ 分别不超过 60° 和 90°，所以，$\triangle PAB$ 的外心在三角形的内部，则折痕相交；若 P 在以 AB 为直径的圆内，那么 PA 和 PB

的中垂线交点与 P 被 AB 分开，所以，折痕不在 $\triangle ABC$ 内部相交. 若 P 在圆上，则折痕在 AB 上相交.

类似地讨论用于以 BC 为直径的圆和以 AC 为直径的圆.

注意到 $\triangle ABC$ 的所有内点都在以 AC 为直径的圆内，所以三角形的折叠点所构成的集合是三角形内点和以 AB、BC 为直径的圆的内点的公共部分.

下面来求这个公共部分的面积.

如图，以 BC、AB 为直径的两圆都与 AC 交于 D(D 是 B 到 AC 的垂足). 题目所求部分是两段圆弧所围的部分. 一个是以 AB 中点 M 为圆心，以 18 为半径的 120°的弧，另一个是以 BC 中点 N 为圆心，以 $18\sqrt{3}$ 为半径的 60°的弧. 则 $\triangle DBM$ 和 $\triangle DBN$ 的面积分别为 $81\sqrt{3}$ 和 $243\sqrt{3}$. 扇形 DMB 和 DNB 的面积分别为 108π 和 162π. 所求部分的面积是

$$(180\pi+162\pi)-(81\sqrt{3}+243\sqrt{3})=270\pi-324\sqrt{3}.$$

从而 $q+r+s=270+324+3=597$.

8. 解：假设结论不成立，即存在这样的排列，使得对于含中点 C 的任一区间 AB，不等式 $c<\frac{a+b}{2}$ 成立，其中 a、b、c 是点 A、B、C 对应的数.

令 A、B、C、A_n、B_n($n=1,2,\cdots$) 在数轴上对应于点 $-1,1,0,-\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^n}$，$a$，$b$，$c$，$a_n$，$b_n$ 表示这些点上的整数. 于是由假设推出 $c<\frac{a+b}{2}$，$a_1<\frac{a+c}{2}$，$a_2<\frac{a_1+c}{2}$ 等等.

从而 $\max\{a,c\}>\max\{a_1,a_2\}$，

即 $a_1<\frac{a+c}{2}\leqslant\frac{\max\{a,c\}+\max\{a,c\}}{2}=\max\{a,c\}$，

$a_2<\frac{a_1+c}{2}\leqslant\frac{\max\{a,c\}+c}{2}\leqslant\max\{a,c\}$.

类似地，$\max\{a_1,a_2\}>\max\{a_3,a_4\}>\max\{a_5,a_6\}>\cdots$，

$\max\{b,c\}>\max\{b_1,b_2\}>\max\{b_3,b_4\}>\cdots$.

因此 $a_{2m}<\max\{a,c\}-m$，$b_{2m}<\max\{b,c\}-m$，这表示在某一 m 下有不等式 $a_{2m}+b_{2m}\leqslant 2c$，矛盾. 因为数 c 是区间 $A_{2m}B_{2m}$ 的中点.

9. 解：当 $n=4$ 时，若 P_1，P_2，P_3，P_4 不是凸四边形的顶点，不妨假设 P_4 在 $\triangle P_1P_2P_3$ 的内部，则 $a_1=a_2=a_3=0$，$a_4=1$，所以 $m(S)=1$. 假设 P_1，P_2，P_3，P_4 是一个凸四边形的顶点，如果 $\angle P_1+\angle P_3>180°$，则 $\angle P_2+\angle P_4<180°$. 所以

$a_1=a_3=1$，$a_2=a_4=0$，$m(S)=2$.

同理，如果 $\angle P_1+\angle P_3<180°$，则 $\angle P_2+\angle P_4>180°$. 所以

$a_1=a_3=0$，$a_2=a_4=1$，$m(S)=2$.

下面考虑一般的情形.

数 $m(S)$是对所有满足条件的点对$(P_t,P_iP_jP_k)$计数,其中$(P_t,P_iP_jP_k)$表示包含P_t的圆$P_iP_jP_k$的数目,$1\leqslant t\leqslant n$.对于S中的由四个点构成的每个集合$\{P_i,P_j,P_k,P_t\}$有四种可能,即$(P_i,P_jP_kP_t)$,$(P_j,P_kP_iP_t)$,$(P_k,P_iP_jP_t)$和$(P_t,P_iP_jP_k)$有可能贡献一个1到$m(S)$中.如果这四个点组成一个凸四边形,则这四个点对中恰有两个点对各贡献一个1到$m(S)$中,否则这四个点对中只有一个点对贡献一个1到$m(S)$中.

如果记$a(S)$和$b(S)$分别为S中凸四边形和不能构成凸四边形的四点组的数目,那么$m(S)=2a(S)+b(S)$.

又因为$a(S)+b(S)=C_n^4$,所以,$m(S)=C_n^4+a(S)$.

下面证明$f(n)=2C_n^4$满足条件.

如果S中的点是凸n边形的顶点,那么$a(S)=C_n^4$,所以$m(S)=2C_n^4=f(n)$.

反之,如果$m(S)=f(n)$,那么$a(S)=C_n^4$.

所以,由S中每四个点所确定的四边形均为凸四边形.

因此,S中的点是凸n边形的顶点.

10.解:对于好的区域的每个顶点,如果该顶点所构成的区域的内角为90°,那么称该顶点为凸的;如果为270°,那么称该顶点为凹的.

对于区域R的一个周界所构成的简单闭曲线C,称(R,C)为周界对.一个周界对(R,C)被称为是"外部的"或"内部的",如果R被包含在C的内部或外部.设B是好的区域的周界对所构成的集合,它是外部的周界对所构成的集合O和内部的周界对所构成的集合I的并集.且$O\cap I\neq\varnothing$.对于一个周界对$b=(R,C)$,设v_b,c_b分别是属于周界线C的区域R的凸顶点、凹顶点的数目.

下面证明四个重要结论.

(1) $\sum\limits_{b\subset B}c_b=4n$.

(2) $v_b-c_b=\begin{cases}4,b\in O\\-4,b\in I.\end{cases}$

(3) $k\leqslant 8n$,其中k是好的区域周界的数目.

(4)集合I非空.

每一个给定的矩形的顶点恰能构成一个凸顶点和一个凹顶点;反之,一个区域的每一个凹顶点来自于一个已知矩形的一个顶点,这就证明了结论(1).

对于周界对$b=(R,C)$,下面的方程是从两个方面表示的,在区域R内的C的顶点的内角之和为

$$v_b\cdot 90°+c_b\cdot 270°=\begin{cases}(v_b+c_b-2)\cdot 180°,b\in O\\(v_b+c_b)\cdot 360°-(v_b+c_b-2)\cdot 180°,b\in I\end{cases}$$

整理后即知结论(2)成立.

对于在好的区域里的每一个周界对(R,C),C上至少有一个顶点是已知矩形的顶点,因为已知矩形的每个顶点恰出现在两个周界对中,于是结论(3)成立.唯一的无限区域是一个好的区域,所有的边界曲线是内部的边界,结论(4)也成立.因此,所有好的区域顶点数目之和为

$$\begin{aligned}\sum_{b\in B}(v_b-c_b)&=\sum_{b\in B}[2c_b+(v_b-c_b)]\\&\leqslant 2\cdot 4n+4(k-1)-4\\&\leqslant 8n+32n-4-4\\&=40n-8\\&<40n.\end{aligned}$$

第6讲 覆盖

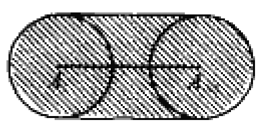
1.提示:对点集M,可以作两条距离为1的平行直线,使M在两直线之间,这样可以得3组彼此成60°的直线,再进行简单调整即可成正六边形.这样,M均在正六边形内,且边长为$1\times\frac{1}{2}\div\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.解:在5×7方格板的每一个小方格内填上数字-2和1,如图.易见,每个拐形覆盖的3个方格中3个数之和非负,因而无论用拐形覆盖多少次,盖住的所有数字之和(一个数被盖了几层就计算几次)都是非负的.另外,方格板上数字总和为$12\times(-2)+23\times 1=-1$,当被覆盖$k$层时,盖住的数字之和为$-k$,矛盾!

−2	1	−2	1	−2	1	−2
1	1	1	1	1	1	1
−2	1	−2	1	−2	1	−2
1	1	1	1	1	1	1
−2	1	−2	1	−2	1	−2

所以,不存在满足题中要求的覆盖.

3.证明:设折线为$A_1A_2\cdots A_n$,对每个线段$A_iA_{i+1}(i=1,2,\cdots n-1)$,分别以$A_i$、$A_{i+1}$为圆心,1为半径作圆,并作两个圆的两条外公切线,则$S_{阴}=2A_iA_{i+1}+\pi$.

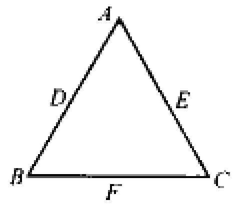


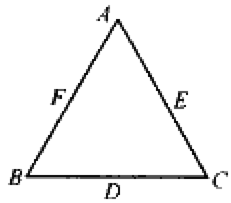
由于这样的"折形带"能覆盖住边长为50的正方形,

所以$2A_1A_2+2A_2A_3+\cdots+2A_{n-1}A_n+\pi\geqslant 50^2$.

所以折线长 $l=A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}$,

$A_n\geqslant\frac{1}{2}(2500-\pi)>1248$.


(Ⅰ)


(Ⅱ)

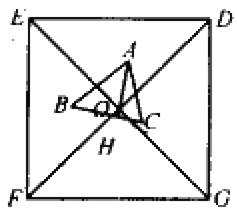
4. 证明:考虑到$\triangle ABC$的三个顶点与其三边的中点D,E,F一共六点,用5个正三角形去覆盖,由抽屉原理知,一定有某个正三角形内部至少有两个点,若这两个点是两顶点,则显然得证.

若这两个点一个是顶点A,另一个是某边的中点D.

若为情形(Ⅰ),则去覆盖AD的正三角形的边长$\geqslant AD$,即正三角形的边长大于等于原$\triangle ABC$边长的一半,故用4个即可.

若为情形(Ⅱ),则易得证.

5. 证明:设边长大于$\sqrt{\frac{2}{3}}$的正三角形任意放入一个边长为1的正方形$DEFG$内,设DF与GE的交点为O,则A必在$\triangle DOE$,$\triangle EOF$,$\triangle FOG$及$\triangle GOD$中某个三角形的内部或边界上,不妨设A在$\triangle DOE$的内部或边界上,作$\triangle ABC$的高AH,则

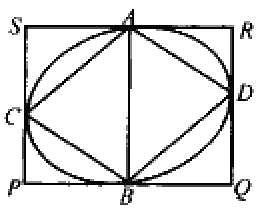


$$AH=\frac{\sqrt{3}}{2}BC>\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=OE>AO.$$

可见,O,A在BC的同一侧,同理可证O,B在AC的同一侧,O,C在AB的同一侧,于是O必在$\triangle ABC$内.

因此,如果边长为1的正方形内可以无重叠地放置两个边长大于$\sqrt{\frac{2}{3}}$的正三角形,则正方形中心必是这两个正三角形的公共点,矛盾. 可见,边长为1的正方形不可能无重叠地放置两个边长大于$\sqrt{\frac{2}{3}}$的正三角形.

6. 证明:设AB为凸形M的直径,过A点作直线$l\perp AB$,则M一定在l一侧,否则有一点$A'\in M$与B在直线l的两侧,从而$\angle A'AB>90^\circ$,$A'B>AB$,矛盾.



同样过B作$l'\perp AB$,再作两条与AB平行的直线,将M"夹"在中间,这四条线构成一个覆盖M的矩形$RSPQ$,设C,D是PS,QR上的点,且$C,D\in M$.

设凸形面积为S. 则$2S\geqslant 2S_{ACBD}=S_{PQRS}$. 证毕.

7. 证明:先证如果三条线段两两相交,那么它们有公共点. 设a_1,a_2,a_3是三条两两相交的线段,M_1是a_2,a_3的公共点,M_2是a_3,a_1的公共点,M_3是a_1,a_2的公共点. M_1、M_2、M_3若有某个重合,则成立;若不重合,不妨设M_1



在 M_2M_3 之间. 因为 M_2、$M_3\in a_1$，所以线段 M_2，$M_3\in a_1$，$M_1\in a_1$，M_1 即为 a_1、a_2、a_3 的公共点，由此可得，每三条线段有公共点，根据海莱定理知，这 n 条线段有公共点. 证毕!

8. 证明：用数学归纳法证明. 当 $n=1,2$ 时，结论显然成立. 当 $n>2$ 时，假设对所有 $m\times m(m<n)$ 的棋盘结论成立，要证对 $n\times n$ 的棋盘结论也成立.

对任一组满足题设要求的"子片"，考虑关于主对角线对称的方格对 (i,j) 与 (j,i) $(i\neq j)$. 如果在每对方格中至少有一个被覆盖，那么结论成立.

如果有一对对称方格 (i,j) 与 (j,i) 都不被覆盖. 删去第 i、j 行及第 i、j 列. 这时每个子片至多被删去两行，或两列，或一行一列，否则该子片盖住方格 (i,j) 或 (j,i)，因此半周长都不小于 $n-2$. 根据归纳假设，剩下的 $(n-2)\times(n-2)$ 的棋盘中至少有一半的方格被子片覆盖.

删去的方格共 $(4n-4)$ 个. 由于盖住方格 (i,i) 的子片，半周长不小于 n，所以它在第 i 行与第 j 列至少盖住 $n-1$ 个方格. 同理，盖住方格 (j,j) 的子片至少盖住第 j 行与第 j 列的 $(n-1)$ 个方格. 由于子片不盖住方格 (i,j) 与 (j,i)，所以在删去的两行两列中被子片覆盖的方格至少有 $2(n-1)$ 个. 即不少于被删去方格的一半.

综上所述，本题得证.

9. 证明：设正方形内直径为 0.001 的圆的集合为 M，M 覆盖的面积为 S. 由向量 $\overrightarrow{m}$ 的方向平行正方形的一边，向量 $\overrightarrow{m}$ 与 $\overrightarrow{n}$ 的夹角为 $60°$，将 M 沿 $\overrightarrow{m}$ 平移 0.001 后得到的集合记为 M_1，M 沿 $\overrightarrow{n}$ 平移 0.001 后得到的集合记为 M_2，则 M_1、M_2 覆盖的面积都为 S. 下面证明 M，M_1，M_2 互不重叠，事实上，若 M 中的圆 $\odot O_1$ 与 M_1 中圆 $\odot O_2'$ 有重叠的内部，则 $O_1O_2'<0.001$. 设 $\odot O_2'$ 是 M 中的圆 $\odot O_2$ 沿 $\overrightarrow{m}$ 平移 0.001 后得到的，即 $O_2O_2'=0.001$，于是 $O_1O_2\leqslant O_1O_2'+O_2'O_2<0.001+0.001=0.002$，矛盾！故 M 中的圆与 M_1 中的圆互不重叠，同理可证 M 中的圆与 M_2 中的圆互不重叠. 设 $\overrightarrow{l}$ 与 $\overrightarrow{n}$ 夹角也是 $60°$，且使 $\overrightarrow{n}$ 平分 $\overrightarrow{m}$ 与 $\overrightarrow{l}$ 的夹角，那么，M_2 可看成 M_1 沿 $\overrightarrow{l}$ 的方向平移 0.001 而得到的，故 M_2 中的圆与 M_1 中的圆也不重叠. 而 M，M_1，M_2 都在边长为 1.001 的正方形内，所以，$3S\leqslant(1.001)^2$，$S\leqslant\frac{1}{3}\times(1.001)^2<0.34$.

10. 证明：若不覆盖整个圆周，则圆周上有一个点不在任何一条圆弧上，把圆周在这一点剪断，拉直为一条线段，就是题的解.

11. 证明：因为 $f(1)=1>f(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上为单调递增.

因为 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上的图像能被以点 $(x_1,f(x_1))$、$(x_1,f(x_2))$、$(x_2,f(x_1))$、$(x_2,f(x_2))$ 为顶点的矩形覆盖.

取 x_0，并取 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$，使得

$$(x_i-x_{i-1})[f(x_i)-f(x_{i-1})]=\frac{1}{n^2}(i=1,2,\cdots,n).$$

若存在 $i\leqslant n-2$，使 $(1-x_i)[1-f(x_i)]\leqslant\frac{1}{n^2}$，则命题得证．

否则，只需证明 $(1-x_{n-1})[1-f(x_{n-1})]\leqslant\frac{1}{n^2}$．

而 $(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_{n-1}-x_{n-2})+(1-x_{n-1})=1$，

$[f(x_1)-f(x_0)][f(x_2)-f(x_1)]+\cdots+[1-f(x_{n-1})]=1$．

所以由柯西不等式得

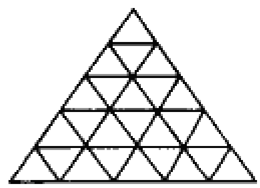
$$1=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\geqslant\Big[\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})(f(x_i)-f(x_{i-1}))}\Big]^2$$

$$=\left[\frac{n-1}{n}+\sqrt{(1-x_{n-1})(1-f(x_{n-1}))}\right]^2$$

所以 $(1-x_{n-1})[1-f(x_{n-1})]\leqslant\frac{1}{n^2}$．

从而命题得证．

12．证明：将此三角形各边 5 等分，并连结各边对应分点，使其连线平行于原三角形各边（如图），这样，原三角形被分成 25 个边长为 $\frac{1}{5}$ 的正三角形，它们共有 21 个不同的顶点．由于原三角形被 6 个半径为 r 的圆覆盖，由抽屉原理知，至少有 $\left[\frac{20}{6}\right]+1=4$ 个点在同一个圆中，而显然这 21 个点中任意 4 点的最大距离的最小值 $d\geqslant\frac{\sqrt{3}}{5}$，从而 $2r\geqslant\frac{\sqrt{3}}{5}$，所以 $r\geqslant\frac{\sqrt{3}}{10}$，命题得证．



13．证明：(1) 设 O 为四边形 $ABCD$ 内任意一点，连结 OA，OB，OC，OD．

由于 $\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle DOA=360^\circ$，

则 $\angle AOB$，$\angle BOC$，$\angle COD$，$\angle DOA$ 中至少有一个不小于 90°，假设 $\angle BOC\geqslant 90^\circ$，则 O 必在以 BC 为直径的半圆内，因此四边形内的任意一点都能被四个半圆中的一个所覆盖．

(2) 因为四个角 $\angle AOB$，$\angle BOC$，$\angle COD$，$\angle DOA$ 不可能都大于 90°，于是 O 点不可能同时在这四个半圆内．

如果上述四个角都是 90°，即对角线 AC 和 BD 互相垂直，这时，对角线的交点同时被四个半圆盖住．否则，不可能有被四个半圆同时盖住的点，因而四边形内最多只有一个点同时被四个半圆所覆盖．

14．证明：我们证明盖住 n 个点的最小圆的半径为 1．

因为任三点可被一个半径为1的圆盖住，所以任两点的距离不大于2.

于是，以其中任意一点为圆心，以2为半径的圆必能盖住所有的点，由此可知，存在一个能盖住所有点的圆.因而也必存在一个能盖住所有点的最小圆.设此圆为⊙C，其半径为r，由题设可知$r\geqslant 1$.

下面证明$r\leqslant 1$.

在⊙C的圆周上，如果只有n个点中的一点或者是一点也没有，那么一定能找到一个半径比r小的圆盖住所有的点.⊙C就不是盖住所有点的最小圆，这是不可能的.因此，⊙C的圆周上至少有两点.

假定⊙C上恰好有两点，则此两点必在一直径的两端上.否则⊙C还可以缩小.因为两点的距离不大于2，所以⊙C的半径$r\leqslant 1$.

如果⊙C上有较多的点$a_1,a_2,\cdots,a_k(3\leqslant k\leqslant n)$，则此$k$个点不能同时在劣弧上，否则⊙$C$还可以缩小，这就是说至少有三点在优弧上.这三点组成的三角形没有一个钝角.⊙C是包含这三点的最小圆，由于盖住这三点的半径为1的圆可以完全盖住⊙C，所以$r\leqslant 1$.

由于$r\geqslant 1, r\leqslant 1$，于是$r=1$.

第7讲　平面凸集、凸包及应用

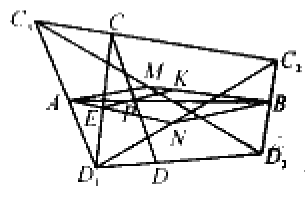
1. 证明：在给定的点中选四点构成凸四边形，将这四边形的相对顶点配成对，这两对点的连线交于一点，对剩下的点作类似地配对，共进行五次(最后将所剩的两个点配为一对)，这样的配对产生11条线段，它们之间至少有五个交点互不相同.

2. 证明：记六个点为A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6，若其中有三点共线，则结论显然成立，假设六点中无三点共线，考虑它们的凸包.

若凸包为凸六边形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，易知必有一个内角不小于120°，不妨设$\angle A_1A_2A_3\geqslant 120°$，且$A_2A_3\geqslant A_1A_2$，由余弦定理易知，$A_1A_3^2\geqslant 2A_1A_2^2(1-\cos 120°)=3A_1A_2^2$，故$\frac{A_1A_3}{A_1A_2}\geqslant\sqrt{3}$.

若凸包为三角形，凸四边形或凸五边形，这些情形下，必有一点落在某个三角形的内部.不妨设点A_4在$\triangle A_1A_2A_3$内部，从而$\angle A_1A_4A_2$、$\angle A_2A_4A_3$、$\angle A_3A_4A_1$中必有一个不小于120°，设$\angle A_1A_4A_2\geqslant 120°$，在$\triangle A_1A_4A_2$中同上用余弦定理即得结论.

3. 证明：从定义出发，我们证明对$A\in H, B\in H$，AB上任一点$P\in H$.



如图所示，设A为线段C_1D_1中点，B为线段C_2D_2中点.

取C_1D_2，C_2D_1中点M，N，易知四边形$AMBN$为▱.

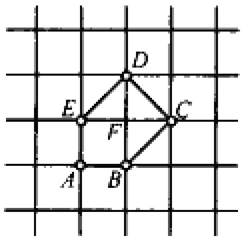
设 C_1，C_2 属于凸集 F，D_1，D_2 属于凸集 G.

所以 $C_1C_2 \subset F$，$D_1D_2 \subset G$.

过 P 作 D_1D_2 的平行线交 AN 于 E，交 BM 于 K，延长 D_1E 交 C_1C_2 于 C，易知 E 为 CD_1 中点，连 CP 并延长交 D_1D_2 于 D，则 P 为 CD 中点. 且 $C \in F$，$D \in G$. 所以 $P \in H$. 证毕！

4. 证明：在平面上任取一条直线 l，把每个多边形投影到 l 上，就得到若干条线段，其中任两条有公共点. 考虑这些线段的左端点，再取它们中最右边的点，我们得到属于所有线段的点 M(利用线段作为凸集的性质). 过 M 与 l 垂直的直线与每个多边形相交.

5. 解：格点多边形的边长最小为 1，其次为 $\sqrt{2}$. 图中五边形 $ABCDE$ 的周长为 $2+3\sqrt{2}$. 若格点五边形周长小于 $2+3\sqrt{2}$，则其中至少有三边长为 1，这三边中有两边相邻，设为图中 AB，AE. 若有一边 $BF=1$，则四边形 $ABFE$ 为单位正方形，第五点在直线 AE，BF 外，不可能与这四点形成凸五边形. 所以与 B 相邻的另一边为图中 BC. 同理与 E 相邻的另一边为图中 ED. 这时凸五边形周长为 $2+3\sqrt{2}$. 因此所求最小值即 $2+3\sqrt{2}$.



6. 解：设点集 M 满足题中要求并考察点集 M 的凸包.

(1) 设凸包多边形的边数不少于 5，则必有 1 个内角是钝角. 设 A，B，C 是该多边形的 3 个相邻顶点且 $\angle ABC$ 为钝角，于是 $\triangle ABC$ 的垂心在三角形外，也在凸包多边形外，无法属于 M，矛盾. 可见，M 的凸包至多有 4 条边.

(2) 设 M 的凸包为四边形. 若四边形有一个内角是钝角，则如(1)可导出矛盾. 因此凸包为矩形. 显然，任何矩形的 4 个顶点所构成的集合满足要求.

如果点集 M 还有一点 E 在凸包矩形 $ABCD$ 之内，则点 E 和矩形的一组相对顶点 A，C 构成钝角三角形. 易证，它的垂心在矩形之外，矛盾. 故知凸包为矩形且满足题中要求的点集 M 只此一种，即矩形的 4 个顶点所构成的集合.

(3) 设 M 的凸包为三角形. 由(1)知，当然不能是钝角三角形. 若凸包为直角三角形，则直角顶点 C 又是垂心，故这时点集 $\{A, B, C\}$ 满足题中要求，又由(2)的证明知，$\triangle ABC$ 内不能再有 M 中的点. 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则垂心 $H \in M$. 这时，点 A，B，C 分别为 $\triangle HBC$，$\triangle HCA$，$\triangle HAB$ 的垂心. 可见，点集 $\{A, B, C, H\}$ 满足题中要求.

若 M 中还有第 5 点 D，不妨设 D 在 $\triangle HBC$ 之内，这将导致 $\triangle DBC$ 的垂心在 $\triangle ABC$ 之外，矛盾.

综上可知，满足题中要求的至少有 3 点的点集共有 3 种：

(ⅰ) 任何矩形的 4 个顶点所构成的点集；

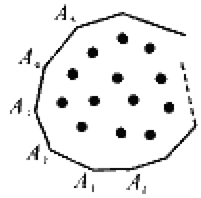
(ⅱ) 直角三角形的 3 个顶点所构成的点集；

(ⅲ)锐角三角形的3个顶点及垂心所构成的点集.

7.解:所给的凸包必是一个凸多边形,取凸包的一条边AB,则其余$2n+1$个点都在AB所在直线的同侧,因无四点共圆,故可将这$2n+1$个点按照由这些点对线段AB的张角的递增顺序重新编号,即将这些点改记为$C_1,C_2,\cdots,C_{2n+1}$,满足$\angle AC_1B<\angle AC_2B<\cdots<\angle AC_{2n+1}B$.这样,点$C_1,\cdots,C_{2n+1}$位于$\triangle ABC_{n-1}$外接圆的外部.而$C_{n+2},\cdots,C_{2n+1}$位于该圆的内部.

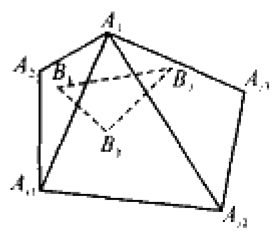
注:若考虑某凸四边形对角和$>180°$(或$<180°$)不如考虑张角的大小好.

8.分析:此题要证明存在性,考虑用反证法,而要用反证法推矛盾,我们则需要对有限图形中的三角形讨论,于是考虑用凸包.而在推矛盾时,即证某个三角形中没有另一集合中的点,则需要一个内部无其他同类点的凸包,顶点都属于同一集合.通过探索可知对5个点的凸包讨论即可.

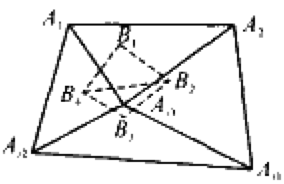


证明:由于A,B中有一个点集至少包含5个点,假设命题不成立,不妨设为A,记A中的点所形成的凸包为$A_1A_2\cdots A_k$.

考虑其一条边A_1A_2.从其一端不妨设为A_2,与其他A中点连线,记$\angle A_1A_2A_{j_1}$为最小值,这样延长$A_1A_{j_1}$分割凸包的一部分中无A中点(反之,$\angle A_1A_2A_{j_1}$不是最小).同理,可得A_{j_2},A_{j_3},这样$A_1A_2A_{j_1}A_{j_2}A_{j_3}$所形成的新凸包中无$A$中的点,对该凸包进行讨论.

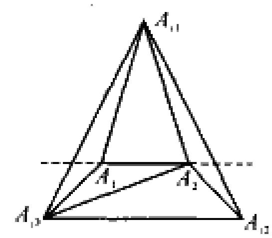


(ⅰ)若凸包为五边形,由假设$\triangle A_1A_2A_{j_1}$、$\triangle A_1A_{j_1}A_{j_2}$、$\triangle A_1A_{j_2}A_{j_3}$中各有一个$B$中的点.记为$B_1$,$B_2$,$B_3$.则$\triangle B_1B_2B_3$有$A$中一点,矛盾.



(ⅱ)若凸包为四边形,不妨设A_{j_3}在四边形$A_1A_2A_{j_1}A_{j_2}$中,

由假设$\triangle A_1A_2A_{j_1}$、$\triangle A_2A_{j_1}A_{j_3}$、$\triangle A_{j_1}A_{j_2}A_{j_3}$、$\triangle A_{j_1}A_1A_{j_3}$中各有一$B$中的点记为$B_1$,$B_2$,$B_3$,$B_4$,可知至多在$\triangle B_1B_2B_4$、$\triangle B_2B_3B_4$中的某一个三角形中,此时另一个三角形中无$A$中点,矛盾.



(ⅲ)若凸包为三角形,不妨设A_1,A_2在$\triangle A_{j_1}A_{j_2}A_{j_3}$中.在$\triangle A_1A_2A_{j_1}$,$\triangle A_2A_{j_2}A_{j_3}$中各有一$B$中的点$B_1$,$B_2$.若$\triangle A_{j_1}A_{j_3}A_1$与$\triangle A_{j_1}A_2A_{j_2}$在直线$A_1A_2$下方的$B$中,则$\triangle B_1B_2B_3$中无$A$中点,矛盾.

若$\triangle A_{j_2}A_{j_3}A_1$与$\triangle A_{j_1}A_{j_2}A_2$中$B$的点在$A_1A_2$上方,再结合$\triangle A_{j_1}A_1A_2$中$B$的点,同样矛盾.

故原命题成立.

9.证明:考虑这六点的凸包,它是一个凸多边形,顶点是这些已知点的全体或一

部分.

如果凸包是六边形,那么必有一个内角$\geqslant\frac{(6-2)\times 180^\circ}{6}=120^\circ$.

设$\angle ABC\geqslant 120^\circ$,则$A,B,C$即为所求.

如果凸包是$\triangle ABC$,那么有一已知点D在这三角形内.$\angle ADB$、$\angle BDC$、$\angle CDA$中必有一个$\geqslant 120^\circ$,结论成立.

如果凸包是四边形或五边形,用对角线将它们剖分为三角形,必有一个三角形中有已知点.于是由上一种情形的讨论即得.